EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

14e JAARGANG 1938, Nr. 6.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

☛ Bij de verzending van pres. ex. van de *tweede* druk (thans derde) van de Schooltafel is een prosp. van ongeveer 3 blz. bijgevoegd. Men zal mij zeer verplichten met toezending van dat prosp.; noch de uitgever, noch ik, hebben een ex. meer. P. W.

INHOUD.

Ik wil er alleen van zeggen, dat het een herhaaldelijk handig manoeuvreeren is met groepen van de wortels

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \ldots\ \varepsilon^{16}(\varepsilon^{-1})$$

van de vergelijking

$$x^{16} + x^{15} + x^{14} + \ldots + 1 = 0$$ [1].

Ik zal de vraag, of in bepaalde gevallen een constructie mogelijk of onmogelijk is, niet verder vervolgen. Er zijn tal van onmogelijke planimetrische constructies, al mogen dan misschien die van de kwadratuur van een cirkel, de trisectie van een hoek en het verdubbelen van een gegeven kubus historisch de meeste bekendheid hebben verkregen. [Zie ook Euclides (Bijvoegsel) 2e jg. 1925/26 no. 1, blz. 16.]

4. Ik zal nu de beperkingen in het gebruik der instrumenten (physisch gesproken) gaan bespreken en zal het in de eerste plaats hebben over *het uitsluitend gebruik van den passer.* Men kan op zeer eenvoudige wijze aantoonen, dat dit bij *alle* planimetrische constructies *mogelijk* is. Daartoe behandelen wij vier problemen:

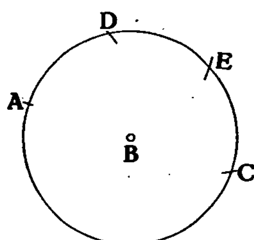


Fig. 3.

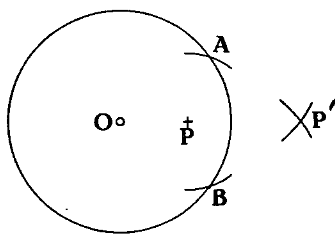


Fig. 4.

a) AB (zie fig. 3) te verlengen met BC = AB.

Constructie: Beschrijf cirkel (B)A [2]) en maak koorde AD = = koorde DE = koorde EC = AB.

Opmerking. Men kan nu ook AB zoover tot F verlengen, dat AF = n . AB (n geheel).

b) Ten opzichte van een willekeurigen grondcirkel (O)r [3]) (zie fig. 4) het inverse punt P′ van P te construeeren.

Constructie: Zij OP > ½ r, dan beschrijft men den cirkel (P)O, die cirkel (O)r in A en B snijdt. Beschrijf nu de cirkels (A)O en (B)O, dan is hun 2e snijpunt het gezochte punt P′.

[1]) Men zie b.v. Weber u. Wellstein, Enzykl. der Elementar-Mathematik.
[2]) d.w.z. den cirkel met B tot middelpunt en BA tot straal.
[3]) d.w.z. den cirkel met O tot middelpunt en r tot straal.

Bewijs: P′ ligt op OP. $\triangle$ OPA $\sim$ $\triangle$ OAP′, dus OP . OP′ = = OA . OA.

Is OP < ½ r, dan neemt men OQ = n . OP (n geheel), zoodat OQ > ½ r; men vindt dan OQ′ en neemt OP′ = n . OQ′, want

$$OP' = n \,.\, OQ' = n \,.\, \frac{r^2}{OQ} = n \,.\, \frac{r^2}{n \,.\, OP} = \frac{r^2}{OP}.$$

c) Ten opzichte van een willekeurigen grondcirkel (O)r (zie fig. 5) den inversen cirkel van de lijn PQ (door P en Q bepaald) te construeeren.

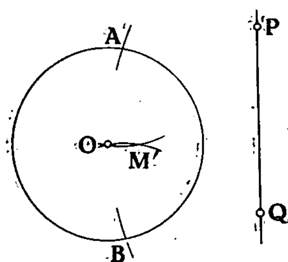


Fig. 5.

Constructie: De cirkels (P)O en (Q)O geven het spiegelpunt M van O t.o. van PQ. Het inverse punt M′ van M is het middelpunt van den gevraagden cirkel, terwijl M′O diens straal is.

Bewijs: O, M′ en M zijn collineair, terwijl

$$OM' = \frac{r^2}{OM} = \frac{r^2}{2 \times \frac{1}{2} OM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{\frac{1}{2} OM}.$$

d) Het middelpunt M′ van een cirkel te construeeren, die de inverse is van een gegeven cirkel $(O_1)r_1$ ten opzichte van een grondcirkel (O)r (zie fig. 6).

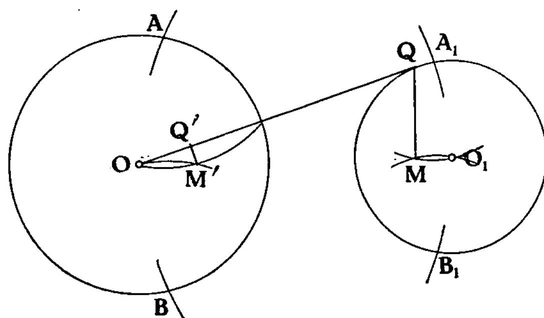


Fig. 6.

Constructie: We nemen cirkel (O)r buiten cirkel $(O_1)r_1$. Construeer M als inverse punt van O t.o. van cirkel $(O_1)r_1$, dan is M′ het inverse punt van M t.o. van cirkel (O)r.

Bewijs: O, M′, M en O_1 zijn collineair. Zij OQ raaklijn aan cirkel

$(O_1)r_1$ in Q, dan is $\angle$ OMQ recht. Zij Q' het inverse punt van Q t.o. van cirkel $(O)r$, dan heeft men

$$OQ' \times OQ = OM' \times OM \; (= r^2),$$

dus is ook $\angle$ OQ'M' recht. De inverse cirkel van cirkel $(O_1)r_1$ moet OQ in Q' raken, dus is M' het middelpunt daarvan.

Dat men nu met het trekken van cirkels bij elke constructie kan uitkomen, is duidelijk. Men neemt een grondcirkel buiten het gebied der gegeven figuur φ en inverteert φ tot een figuur φ'. Cirkels en lijnen, die in φ moesten getrokken worden, worden geinverteerd tot cirkels in φ'. De dan ontstane snijpunten kunnen nu geinverteerd worden tot punten in φ. Zouden dan verder lijnen en cirkels in φ moeten getrokken worden, dan kan men hun inverse cirkels weer in φ' teekenen; die op hun beurt snijpunten geven en weder tot punten in φ kunnen geinverteerd worden, enz.

In sub 8 van dit artikel komen we op het uitsluitend gebruik van den passer terug.

5. Dat wij met een *uitsluitend gebruik van de lineaal* voor *alle* planimetrische constructies *niet* uitkomen, behoef ik nauwelijks te zeggen. Op hetgeen men dan wèl met de lineaal alleen kan doen, wordt in sub 9 (Aanhangsel) zeer in 't kort ingegaan.

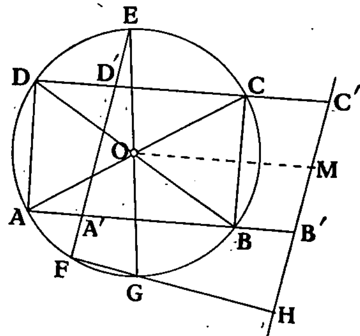


Fig. 7.

Bij B'C' de letter *l* zetten.

Het blijkt, dat we *met de lineaal* voor *alle* constructies uitkomen, als we over *één vasten cirkel, inclusief zijn middelpunt,* beschikken.[1]) Zij $(O)r$ (zie fig. 7) die cirkel. Met behulp van twee middellijnen AC en BD teekenen we gemakkelijk in dien cirkel een rechthoek, waardoor we dus twee paar evenwijdige lijnen verkrijgen.

Twee evenwijdige lijnen AB en DC (zie fig. 8) stellen ons in staat om een lijnstuk AB, gelegen op een van beide, te halveeren. We maken dan gebruik van de eigenschap van een trapezium

---

[1]) Het is duidelijk, dat, aangezien we ons tot constructies van elementaire vraagstukken beperken, we niet de vraag onder de oogen zullen zien, of vaste krommen van hoogeren graad ons ook van dienst kunnen zijn.

ABCD, die zegt, dat de lijn ST, die het snijpunt S van AD en BC met het snijpunt T van AC en BD verbindt, AB in M (en ook DC in N) halveert. (We kunnen ook S éérst aannemen.)

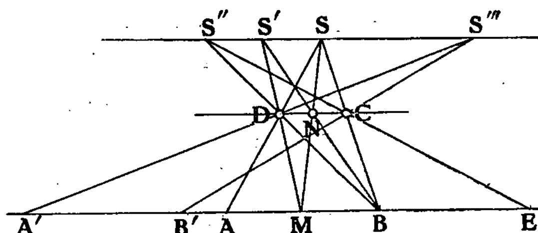


Fig. 8.

Trekken we verder MD en BN, dan zal hun snijpunt S′ de lijn S′S mogelijk maken evenwijdig met AB.

Het snijpunt S″ van SS′ met BD, verbonden met C, doet E op AB ontstaan, zoodat BE = AB. Door middel van S‴ op S′S en de punten C en D laat zich het stuk AB op een andere plaats van de lijn AB neerzetten.

Soortgelijke constructies zijn ook met een punt T tusschen AB en DC in plaats van met S (S′, S″, S‴) uit te voeren.

Ook kan men met de punten A, M en B een trapezium ABCD (S en T) opbouwen, waardoor een lijn DC // AB verkregen wordt (D kan dan willekeurig zijn).

Om nu in fig. 7 een lijn evenwijdig met *l* te trekken, maakt men A′B′ = AB (op AB), D′C′ = DC (op DC), waarbij B′ en C′ op *l* liggen (A′B′ en D′C′ aan denzelfden kant van *l*), dan is A′D′ // *l*.

Snijdt A′D′ den cirkel (O)*r* in E en F, en EO in G, dan heeft men FG ⊥ *l*.

Om een lijn evenwijdig met *l* te verkrijgen, kan men ook K, het midden van BC, met O verbinden. Snijdt OK de lijn *l* in M, dan is M het midden van B′C′, enz.

Het verplaatsen van een lijnstuk evenwijdig met zichzelf is nu ook eenvoudig.

Voor het verplaatsen van een hoek BAC naar O, zoodat een been langs OD moet vallen, verplaatst men eerst ∠ BAC naar O, zoodat OB′// AB en OC′ // AC (B′ en C′ op den cirkel). Nu construeert men door parallelen de ruit ODEC′, dan halveert

OE $\angle$ DOC′. Trekt men nu B′F $\perp$ OE — men kan ook zeggen B′F // DC′ — (F op den cirkel), dan is $\angle$ DOF = = $\angle$ BAC.

Deze hoek DOF kan nu door het trekken van parallelen naar een ander hoekpunt verplaatst worden.

Het blijkt nu ook, hoe men een hoek kan middendoor deelen.

Door de loodlijn uit B′ op OC′ kan men $\angle$ B′OC′ en dan ook $\angle$ BAC verdubbelen.

Fig. 9.

Duidelijk is verder, hoe men een lijnstuk op een niet-daarmede-parallele afzet. Men verplaatst parallel beide naar O als hoekpunt, verbindt de uiteinden der stralen, enz.

De constructie van $x = \frac{ab}{c}$ zou verricht kunnen worden met behulp van het besprokene. Zijn AB = c, AB′ = a, AC = b op eenzelfde lijn in dezelfde richting afgezet (zie fig. 10), dan kan men ook aldus te werk gaan: Teeken op BC $\triangle$ BCS en trek S′S // AB. Trek S′B′, die SB in B_1 snijdt. Trek AB_1, die SC in C_1 snijdt. Trek $S'C_1$, die AB in C′ snijdt, dan is AC′ = x. Immers men heeft volgens Menelaüs:

$$\frac{BA}{CA} \times \frac{CC_1}{SC_1} \times \frac{SB_1}{BB_1} = 1 = \frac{B'A}{C'A} \times \frac{C'C_1}{S'C_1} \times \frac{S'B_1}{B'B_1}$$

dus wegens

$$\frac{CC_1}{SC_1} = \frac{C'C_1}{S'C_1} \text{ en } \frac{SB_1}{BB_1} = \frac{S'B_1}{B'B_1}$$

moet

$$\frac{BA}{CA} = \frac{B'A}{C'A}.$$

Fig. 10.

Er blijft nu nog over te bespreken: a) de constructie van de snijpunten van een lijn en een cirkel, die gegeven is door zijn middelpunt en een punt van zijn omtrek en b) de snijpunten van twee cirkels te construeeren, als van die cirkels hun middelpunten en bij ieder een punt van hun omtrekken gegeven zijn.

a). De vaste cirkel is (O)*r* (zie fig. 11), de andere gegeven cirkel is (M)A (alleen M en A gegeven), de gegeven lijn is *l*. Men teekent OA′ // MA . AA′ en MO snijden dan elkaar in het gelijk-

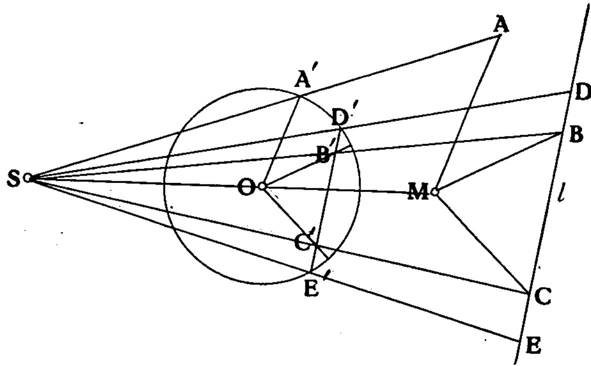


Fig. 11.

vormigheidspunt S der beide cirkels. Men trekt MB en MC (B en C op *l*), verder SB, SC, OB′ // MB, OC′ // MC (B′ en C′ op SB en SC). B′C′ snijdt cirkel (O)*r* in D′ en E′. De snijpunten D en E van SD′ en SE′ met *l* leveren dan de gezochte snijpunten.

b) De vaste cirkel is (O)*r* (fig. 12), de andere cirkels zijn

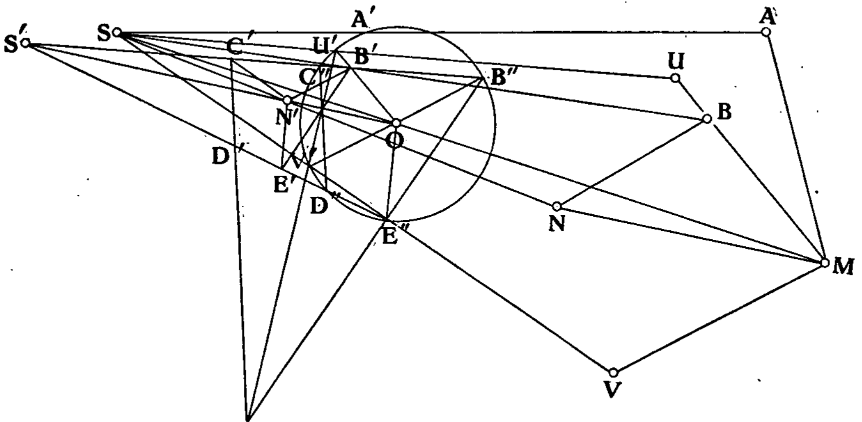


Fig. 12.

(M)A en (N)B (alleen M, A, N en B gegeven). Men teekent 't gelijkvormigheidspunt S van de cirkels (O)*r* en (M)A en verder de figuur SN′OB′ ∾ SNMB. Van de cirkels (O)*r* en (N′)B′

teekent men nu 't gelijkvormigheidspunt S'. De lijn S'B' snijdt deze cirkels in C' (te construeeren), B', C'' en B''. Een andere lijn uit S' snijdt ze in D', E' (beide te construeeren), D'' en E''. Het snijpunt van C'D' en B''E'' wordt verbonden met het snijpunt van E'B' en D''C''. Deze verbindingslijn, die de machtlijn der cirkels (O)r en (N')B' is, levert hun snijpunten U' en V', die door middel van S, O en M de gevraagde snijpunten U en V leveren (SUMV ∾ SU'OV').

6. *De tweekantenlineaal* (lineaal met twee parallele kanten). Het blijkt, dat we voor *alle* constructies met dit instrument uitkomen.

Terstond is duidelijk, dat we verschillende constructies in sub 5 vermeld, ook thans kunnen uitvoeren: door een gegeven punt een parallele tot een gegeven lijn trekken, een lijnstuk halveeren, verdubbelen, op een willekeurige plaats van zijn drager afzetten, evenwijdig aan zichzelf verplaatsen. Is een hoek gegeven, dan kan men een ruit construeeren, die dien hoek bevat; de diagonaal uit het hoekpunt halveert dien hoek; de beide diagonalen leveren dan een rechten hoek en daarmede kan men nu een vierkant construeeren.

Een vierkant ABCD (zie fig. 13) levert de mogelijkheid om op een lijn l een loodlijn te construeeren. Men trekt door het middelpunt O de lijn EF // l (E op AD en F op BC). Trek FG//BA (G op AD) en GH//AC (H op DC), dan is HOK (K op AB) ⊥ EF en dan ook ⊥ l. Dit volgt onmiddellijk uit de congruentie van AKHD en DEFC, die 90° t.o. van elkaar gedraaid zijn.

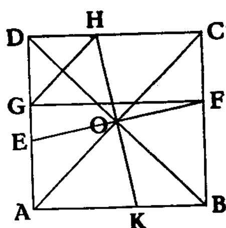


Fig. 13.

Om een lijnstuk OA op een andere lijn OX af te zetten, teekent men de bisectrix OY van ∠ XOA en laat uit A op OY de loodlijn neer. Het verkregen lijnstuk op OX kan men nu verder in het vlak der figuur evenwijdig aan zich zelf verschuiven.

Ter bepaling van de snijpunten van een rechte lijn l met een cirkel (O)A (slechts O en A gegeven) (zie fig. 14) construeert men eerst OB//l, terwijl OB = OA. Dan trekt men $l'//OB$ op een afstand daarvan gelijk aan dien van de twee kanten van de lineaal. Verder trekt men door O een lijn, die l in C en l' in C' snijdt.

Vervolgens C′B′//BC (B′ op BO). Nu plaatst men de lineaal zóó, dat de eene kant door O en de andere door B′ gaat. Dit kan op twee wijzen gebeuren. Dan trekt men langs de kanten OD′ en B′E′, waardoor de ruit E′D′OB′ ontstaat. Het snijpunt D van D′O met l geeft dan een snijpunt van l met cirkel(O)A. Het andere snijpunt ontstaat door de tweede wijze van plaatsen van de lineaal. Immers de gelijkvormigheid der trapezia OBCD en OB′C′D′ (samenstellen van gelijkv. △△) en waarin OD′ = OB′, levert OD = OB = OA.

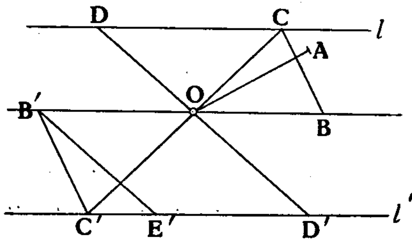


Fig. 14.

Ter bepaling van de snijpunten van twee cirkels construeeren we het snijpunt van de machtlijn met de centraal. Eerst construeeren we (zie fig. 15) de stralen MA en NB ⊥ MN, passen, door parallelen, MB′ = NB op MA en NA′ = = MA op NB af. De middelloodlijn van B′A′ snijdt MN in het gezochte snijpunt O van de machtlijn met de centraal. Immers $MO^2 - MA^2 = (OB'^2 - MB'^2) - NA'^2 = (OA'^2 - NB^2) - NA'^2 = (OA'^2 - NA'^2) - NB^2 = NO^2 - NB^2$.

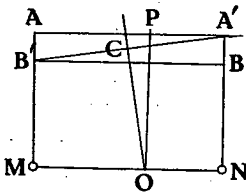


Fig. 15.

De machtlijn zelf is nu OP ⊥ MN. Verder vervolgt men de constructie als de vorige.

7. Ook met *den driehoek* laten zich *alle* constructies uitvoeren. Wij zullen er kort over zijn. Bij het trekken van een parallele door P // l maken we gebruik van gelijkheid van overeenkomstige of verwisselende binnenhoeken. Verder kunnen we gemakkelijk een gelijkbeenigen driehoek teekenen op een gegeven lijnstuk AB als basis en wel naar twee kanten, waardoor we, zelfs zonder dat de driehoek rechthoekig is, AB loodrecht halveeren kunnen, enz.

De snijpunten van een cirkel (O)A (slechts O en A gegeven) met een rechte l bepaalt men met een voldoende-grooten *rechthoekigen* driehoek door vooreerst AO te verlengen, zoodat AB = 2AO, dan de kanten van den rechten hoek door A en B te laten gaan en

het zóó aan te leggen, dat het hoekpunt in l valt. Is de driehoek niet rechthoekig, maar bezit hij een scherpen hoek α, dan construeert men de ruit AOCD, waarin $\angle$ AOC $= 2\alpha$ en zorgt nu, dat het eene been van den scherpen hoek α door A en het andere door C gaat, terwijl het hoekpunt op l komt te liggen aan denzelfden kant van AC als waar O ligt.

De snijpunten van twee cirkels bepaalt men weer met de machtlijn, zooals dat bij de tweekantenlineaal is vermeld.

8. Wat nu de besproken constructies betreft, mogen daaraan verbonden worden namen als o.a. Adler t.o. van sub 4 (1890), Steiner (1833), Enriques (Giacomini en Castelnuovo t.o. van sub 6), niet onvermeld blijven. Hun onderzoekingen bestrijken het gebied ook van een meer algemeen gezichtspunt.

Ik wil echter thans besluiten met in het kort te behandelen de elementaire constructies, die voorkomen in Mascheroni's La geometria del compasso (1797) [1]). Dat het vermelden daarvan niet overbodig is, volgt hieruit, dat, wilde men werkelijk te werk gaan volgens de methode der inversie, men in vele gevallen een wel zeer langdurige bewerking zou hebben uit te voeren.

a) Het verlengen van AB met BC = AB (waardoor men gemakkelijk $\sqrt{a^2 - b^2}$ construeert) en, aansluitende daaraan, ABC $= n$. AB (n geheel) te maken, hebben we besproken in 4*a*.

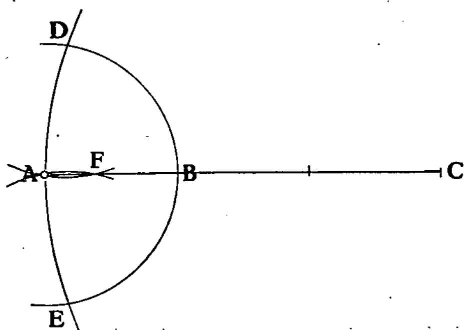


Fig. 16.

In aansluiting daarmede volgt nu: op AB af te passen AF $= \frac{1}{n}$ AB (zie fig. 16). Men construeert op AB eerst AC $= n$. AB. Verder leveren de cirkels (A)B en (C)A de snijpunten D en E. Dan geven de cirkels (D)A en (E)A als tweede snijpunt F. Immers men heeft $\triangle$ FAD $\sim$ $\triangle$ DAC (gelijkbeenig en basisboek gemeen),

[1]) Ik heb daartoe geraadpleegd de Duitsche vertaling door dr. Ed. Hutt, 1880.

dus FA : DA $=$ AD : AC $= 1 : n$ (in de fig. $= 1 : 3$). Zoo laat zich ook AB halveeren.

b) Bg BC van cirkel (O)r te halveeren (zie fig. 17). Men maakt BA $=$ CD $= r$ en OA $=$ OD $=$ BC $= k$, beschrijft de cirkels (A)C en (D)B, die elkaar in P snijden. Uit A en D beschrijft men cirkels met OP tot straal, deze zullen elkaar in het gezochte midden F van bg BC snijden.

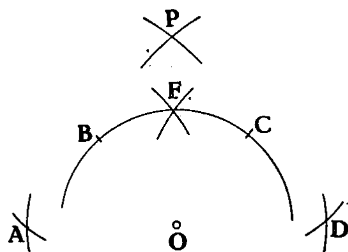


Fig. 17.

Bewijs: AOCB en ODCB zijn parallelogrammen.

AC $= \sqrt{k^2 + r^2 + 2k \cdot \frac{1}{2} k} =$ $= \sqrt{2 k^2 + r^2}$, dus OP $= \sqrt{AP^2 - k^2} = \sqrt{k^2 + r^2}$, waaruit verder volgt OF $= \sqrt{DF^2 - k^2} = r$. F moet dus 't midden van bg BC zijn.

c) Gegeven twee lijnstukken a en b. Te construeeren $a + b$ en $a - b$ (zie fig. 18). Zij AB $= a$. Men beschrijft cirkel (A)b; verder een cirkel (B)C, die den vorigen in C en D snijdt en heeft nu de beide bogen CD van den eersten in E en F volgens *b*) te halveeren. Nu is EB $= a + b$ en FB $= a - b$.

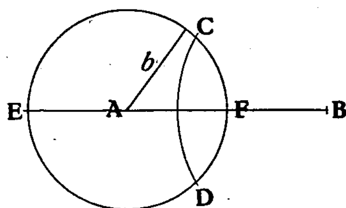


Fig. 18.

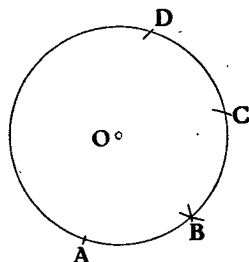


Fig. 19.

De constructie is ook van belang als de vraag eenigszins anders gesteld wordt. Men kan nl. vragen op een lijn, door twee punten gegeven, vanaf één dezer punten een gegeven lijnstuk af te zetten (of de snijpunten van een cirkel met een lijn door het middelpunt te bepalen), b.v. bij de constructie van $\sqrt{a^2 + b^2}$ (zie ook $\sqrt{k^2 + r^2}$ in 8*b*) en constructies, die daarmede samenhangen ($a\sqrt{n}$). Den hierbij noodigen rechten hoek ABD (zie fig. 19) kan men verkrijgen door aansluiting te teekenen van drie gelijkzijdige driehoeken ABO, BCO en CDO met a tot zijde.

d) $x = \frac{ab}{c}$ te construeeren. Bij deze constructie (zie fig. 20) is *w* betrekkelijk willekeurig; overigens is de constructie uit de figuur duidelijk. Men heeft nu $\triangle$ OAB $\cong$ $\triangle$ OCD, waaruit volgt $\angle$ AOB $=$ $\angle$ COD. Dan blijkt $\triangle$ OAC $\sim$ $\triangle$ OBD, dus $c : a = b :$ BD. Deze constructie is, van uit een geometrografisch standpunt bezien, de beste van alle, die men voor $x = \frac{ab}{c}$ heeft.

Fig. 20.

e) $x = \sqrt{ab}$ te construeeren. Aanbeveling verdient de constructie besproken in 3, 1e, (natuurlijk met inachtneming van *c*) hierboven.

f) Het snijpunt van twee elkaar snijdende lijnen (gegeven door twee paar punten) te construeeren (zie fig. 21).

Laat de lijnen AB en CD zijn. Gemakkelijk construeeren we de spiegelpunten C′ en D′ van C en D t. o. van AB. Om nu in het gelijkbeenig trapezium CC′DD′ het snijpunt van CD en C′D′ te verkrijgen construeeren we het parallelogram DD′EC. Nu wordt $\frac{C'C \,.\, D'E}{C'E}$ geconstrueerd en, daarmede als straal, uit C en C′ cirkels, die elkaar in F snijden. F is nu het gezochte snijpunt.

Fig. 21.

g) Het bepalen van de snijpunten van een gegeven lijn (door twee punten bepaald) en een gegeven cirkel is direct duidelijk. (Spiegelpunt bepalen van het middelpunt t.o. van de gegeven lijn en daaruit een cirkel beschrijven met een straal gelijk aan dien van den gegeven cirkel.)

De *noodige* constructies zijn hiermede behandeld. Het zal duidelijk zijn, dat men in sommige gevallen wel vereenvoudigingen kan aanbrengen.

Ik zal eindigen met de bespreking van het werkstuk: het middelpunt van een gegeven cirkelomtrek te construeeren. We zullen een viertal constructies noemen.

1. Men kan natuurlijk drie punten op den omtrek nemen, de gewone constructie door middelloodlijnen beschouwen en door inversie het probleem oplossen.

2. Het snijpunt der middelloodlijnen is natuurlijk ook te vinden volgens *f)* hierboven met eenige vereenvoudiging. Men neme bg AB = bg AC. Het loodrecht middendoor deelen van AB en AC met gelijke stralen geeft een gelijkbeenig trapezium, waarvan het snijpunt der opstaande zijden met behulp van een vierde evenredige te construeeren is.

3. Men neemt A en B willekeurig op den cirkelomtrek (zie fig. 22) en beschrijft uit A den halven cirkel BDC (AB = *a*).

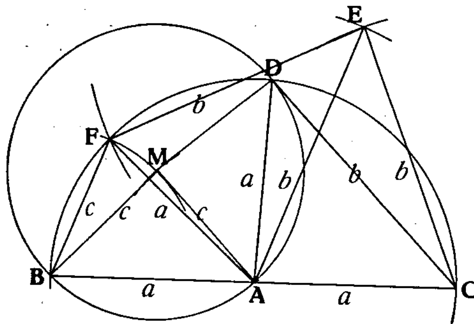


Fig. 22.

D is het snijpunt met den gegeven cirkelomtrek. Verder maakt men CE = AE = EF (F op den halven cirkel) = CD = *b*. Nu is BF = *c* = *r*. Om M te construeeren, beschrijft men dus uit A en B cirkels met *c* tot straal.

Bewijs: Men heeft twee driehoeken met zijden *a, b, b* en één met zijden *c, a, a*, waarvan de som van twee basishoeken en een tophoek gelijk is aan 180°. De laatste is dus met de eerste twee gelijkvormig. Men heeft dus $a : b = c : a$. Hieruit volgt de gelijkvormigheid van de driehoeken met zijden *a, c, c* en *b, a, a*. Daar $\angle$ MAD = 180° — (een basishoek van den eersten + den tophoek van den tweeden), moet deze hoek gelijk zijn aan een basishoek van

Ondergetekende, **abonné op**

Compositio Mathematica
Nieuw Archief voor Wiskunde
„Christiaan Huygens"
„N. T. voor Wiskunde"
„Euclides"

verzoekt toezending van 1 exemplaar:

SCHUH, Leerboek der Nieuwere Meetkunde van het Vlak en van de Ruimte

geb. in heel linnen à *f* 9.00 (gewone prijs is *f* 10.50)

door bemiddeling van de boekhandel
direct per post,

....

Naam: Woonplaats:

....

Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex., en mits besteld vóór 1 Oct. 1938; voor Indië vóór 1 Dec. 1938.

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

$1^1/_2$ cts. postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

Postbus 39.

Giro Ned. Bk. No. 1858 Post Giro No. 6593

GRONINGEN.

PROSPECTUS

LEERBOEK

DER

NIEUWERE MEETKUNDE

VAN HET VLAK EN VAN DE RUIMTE

DOOR

DR. FRED. SCHUH

HOOGLEERAAR AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT

MET 222 FIGUREN EN
1965 VRAAGSTUKKEN

Prijs van het complete boek, groot 524 pagina's, gebonden . . f 10.50
Voor abonné's op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften tot 1 Oct. 1938 f 9.00

P. NOORDHOFF N.V. — 1938 — GRONINGEN-BATAVIA

IN DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR
en bij N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF, Laan Holle 7, Batavia C.

VOORBERICHT.

Bij het verschijnen van dit Leerboek, dat in hoofdzaak bestemd is voor studeerenden voor het Examen Wiskunde KI, maar waarvan verschillende hoofdstukken ook voor andere groepen van studeerenden (b.v. voor Wiskunde L.O. of KV) van nut kunnen zijn, betuig ik in de eerste plaats mijn dank aan de Directie van de N.V. Erven P. Noordhoff's Uitgeverszaak, die het verschijnen van het boek mogelijk heeft gemaakt en voor een fraaie uitvoering daarvan heeft zorg gedragen.

In het bijzonder komt ook een woord van hartelijken dank toe aan mijn assistent, den heer W. TH BOUSCHÉ. De heer BOUSCHÉ heeft niet alleen de figuren geteekend op de keurige wijze, die wij van hem gewend zijn en die niet te overtreffen en nauwelijks te evenaren is, maar hij heeft zich ook steeds geheel in de beteekenis der teekeningen verdiept. Daardoor ontstonden figuren, die vaak aanmerkelijk afweken van de kladjes, die ik hem leverde, doordat de heer BOUSCHÉ er voor zorgde, dat alle snijpunten, die een rol spelen, op de teekening komen, dat geen belangrijke punten al te dicht bij elkaar vallen, enz. enz., iets dat lang niet altijd gemakkelijk is. De stereometrische figuren zijn door den heer BOUSCHÉ steeds nauwkeurig geconstrueerd (in evenwijdige projectie); de constructielijnen zijn echter in de teekening weggelaten. Een uitzondering hierop is gemaakt voor fig. 211, waarbij mij de door den heer BOUSCHÉ bedachte constructie te aardig leek om die den lezers te onthouden.

Den Haag, April 1938. FRED. SCHUH.

INHOUD.

Blz.

K. Inversie in het vlak en in de ruimte. § 300—339.

L. Andere gevallen van dubbelverhouding. § 340—397.

M. Rechtstreeks of tegengesteld gelijkvormige vlakke figuren. § 398—409.

N. Meetkunde op den bol. § 410—427.

INLEIDING.

Dit Leerboek is in hoofdzaak bestemd voor studeerenden voor de Akte Wiskunde KI, die daarin alles zullen vinden, hetgeen zij daarbij voor het vak Meetkunde noodig hebben. Het boek geeft echter hier en daar iets meer, maar de volgende 37 hoofdstukken dienen ze vooral niet over te slaan: I—XVI, XX, XXI, XXV, XXVII, XXVIII, XXX, XXXI, XXXIV—XLII, XLIV—XLVIII; deze hoofdstukken beslaan, zonder de vraagstukken, slechts 200 bladzijden. Ter verruiming van den gezichtskring en met het oog op de analytische meetkunde verdient het aanbeveling ook de hoofdstukken XVII—XIX, XXII, XXIII, XXVI, XXIX, XXXII, XXXIII (die, zonder de vraagstukken, 55 bladzijden beslaan) te bestudeeren.

Van de vraagstukken kunnen de 571 met een sterretje gemerkte (die wat dieper gaan) alle worden overgeslagen. De KI-candidaat kan zich echter nog belangrijk verder beperken. Het maken van de volgende vraagstukken bevelen we aan, waarbij de nummers der **in het bijzonder aanbevolen vraagstukken** vet gedrukt zijn: II **3**, 4; III **6**, 8, 14; IV **31**, 32, 34, 36; V **52**, **56—58**, 59, **62—73**; VI 78, 79, **81**, **82**, 86; VII **87**, **88**, 89, 90, **94**; VIII 101, **102**, 103; IX **105**, 107, 110—112, **113**, 119, **120**; X 125, **127**, **128**, **130**, 131, **133**, 134, **135**, 136, 137; XI **141**, 143, 145, 146, **147—149**, 150—152, **153**, **154**, 156, **156a**; XII 158, **159**, **160**, 161, 162, **164**, **165**, 166; XIII **167**, **168**, 169, 172, 173, **174—179**, 180, 182, 186, **187**; XIV **192**, **193**, 195, 197; XV 200, 201, **203**, **204**, 205; XVI 207, **209**, 210, **218**, 221, **222**, **223**, 224—226, 228, **229—231**, **234**, 235, 236; XVII **242**, **243**, 244, **245**, 246, 247; XVIII **273—275**, 276—280, **281**, **282**; XIX **314**, **315**, 316—318, **322**, **357**, 362, **363**, 367, 371, 373—375, **376—384**, 385, 386, 388, 389; XX **394**, **395**, 396, **399—405**, 408—410, **411**, **412**, 414, 415, **416**, 417, **418**, 421, 423—425, 428, 429, 432; XXI **435**, 437—440, 443, 445, 446, **452**, **453**, **455**, **458**, 461, **463**, **464**, **467—469**, 470—472, **473**, **474**, 475, 476, **479**, **480**, 481, **484**, 485, 487, 488, 490; XXII 492, **494**, **495**; XXIII **498**, 499, **503**, 510, 511; XXV **525**, **529**, **530**, 531, 532, **535**, **536**, 537, 538, **539**, 540, 541; XXVI **556**, 557—559, 567, 568, **573—578**, 579—581, **582**, **583**, 585; XXVII **605**, **606**, 607, **609**, **610**, 611; XXVIII 614, **617—621**, 622—627, **632**, **633**, 634, 635; XXIX **639**, **640**, 642, 643, 656; XXX 667—669, **671**, **673**; XXXI **685**, 686—688;

XXXII 690, 693, 708, 709, **715**, 716; XXXIII **717**, 718, **722**, 723, 724; XXXIV 728, 730, **731**, **735**, 740—745, **746—754**, 755—758, 764—769, 772, 773, **777—787**, 788—790, **794—796**, 797—805; XXXV 810, **812**, **813**, **815—817**, 821—824, **825—832**, 836, 837, 851—853, **854—856**, 857, **858—864**, **866**, **867**, 868, 872, 875—877, **878**, 882—884; XXXVI 885—887, **892**, **893**, 894, **898**, 899, **906**, 908—912, 919, 923, 924, 942, 944, **971**, **974—977**, **980—986**, 987, 988, **991—993**, 1011, 1012; XXXVII 1013, 1014, **1015**, 1016, **1020—1023**; XXXVIII 1073, **1078—1080**, 1082, 1084, 1085, **1090—1099**, 1100—1104, **1105**, **1108**, 1109—1111, 1114, 1122—1126; XXXIX 1127—1130, 1135, 1136, 1138, 1139, 1145, 1146, **1147—1149**, 1150, 1151, **1152—1157**, 1158—1161, **1163**, **1164**, 1165, 1168—1170, 1172, 1173; XL **1190**, 1192—1196, 1198—1200, **1201**, **1202**, **1204—1206**, **1208**, 1210, 1223, 1224, 1228, 1234, **1236—1239**, 1241, 1242, **1245**, **1246**, 1247; XLI 1258, 1259, **1260**, **1261**, 1263, 1264; XLII **1273**, **1274**, 1276, **1277**, **1280—1283**, 1289—1295, 1304—1307, **1309—1314**, 1315—1317, 1322; XLIV 1375, **1376**, 1377, **1381—1388**, **1394**, **1395**, 1397, 1400—1402, **1407—1409**, 1410—1412, **1442**, **1443**, 1444—1446; XLV **1456—1458**, 1459, 1460, **1464—1466**, 1467—1470; XLVI 1474, 1475, **1476**, 1478, 1479, **1480—1482**, 1483, 1484, **1485—1487**, 1488, 1489, 1493; XLVII 1505—1508, **1512**, **1513**, 1514, **1518—1523**, 1527, 1528, 1532, **1533**; XLVIII 1549—1551, **1552**, **1553**, 1557, **1560—1564**, **1568**, 1569—1575, 1586, 1587, 1594, 1596, **1598**, **1601**, 1616, 1617, 1619, 1622, **1623**.

Dit zijn 689 aanbevolen vraagstukken (waarvan er 85 behooren bij de hoofdstukken, die voor Kı niet strikt noodzakelijk zijn). Het aantal der in het bijzonder aanbevolen vraagstukken is 331; sommige van deze zijn van belang om hun algemeene strekking, zooals de vraagstukken **3**, **94**, **128**, **130**, **133**, **153**, **160**, **164**, **229**, **399**, **435**, **494**, **495**, **993**, **1105**. De vraagstukken **993** en **1105** steunen op een aantal der voorafgaande vraagstukken. We laten het aan den lezer over na te gaan welke die voorafgaande vraagstukken zijn.

Zonder dat Hoofdstuk L grondig behoeft te worden bestudeerd, bevelen we daarvan de vraagstukken **1760—1762**, 1763—1765, 1768, 1769, **1770**, 1772, 1773 aan.

In den inhoud vindt men telkens achter de nummers der in een hoofdstuk voorkomende vraagstukken tusschen haakjes vier getallen. Deze geven aan: het totale aantal bij het hoofdstuk behoorende vraagstukken, het aantal daarvan zonder sterretje, het

aantal aanbevolen vraagstukken en het aantal in het bijzondere aanbevolene daarvan.

Voor het Examen Wiskunde L.O. kan het Leerboek eveneens goede diensten bewijzen. We bevelen daarvoor aan de hoofdstukken I—VI, IX—XVI, XX, XXI, XXVII, XXX, XXXI, XXXIV—XXXVII, XXXIX, XL, XLII, XLIV.

Ook zijn verschillende hoofdstukken voor studeerenden voor de Akte Wiskunde Kv van belang. Behalve de hoofdstukken, die over dualiteit en dubbelverhoudingen handelen (onderwerpen, waarmede een voor Kv studeerende zich allicht reeds vertrouwd gemaakt zal hebben), bevelen we met het oog op de analytische en de beschrijvende meetkunde in het bijzonder aan de hoofdstukken XVII—XIX, XXII—XXIV, XXIX, XXXVIII, XLVII—IL; het laatste van deze hoofdstukken is van nut voor de studie der éénbladige hyperboloïde en der hyperbolische paraboloïde. Het is aan te raden door het oplossen van eenige vraagstukken, behoorende bij genoemde hoofdstukken, zich er van te overtuigen, dat het bestudeerde goed is verwerkt. Een stelselmatige oefening in het maken van vraagstukken op dit gebied is evenwel niet noodig. We kunnen echter (behalve de reeds genoemde) de volgende vraagstukken aanbevelen: XXIV **512, 514—517,** 520—522; IL 1663, 1664, 1668, 1672, 1673, **1674, 1676,** 1688, 1689, **1700, 1701,** 1702—1705, 1707—1713, 1726—1728, 1732—1734, 1736, 1737, **1738.** Deze hebben betrekking op viervlakscoördinaten en op hyperboloïden en kegelsneden.

Verder meenen we nog, dat het leerboek ook voor leeraren bij het Middelbaar of Gymnasiaal onderwijs van nut kan zijn, om hun onderwijs in de meetkunde te verdiepen. Men zou hiervoor b.v. kunnen denken aan de zoo belangrijke begrippen als elementen in het oneindige en dualiteit, maar veel zal daarbij van het gehalte der klasse afhangen.

Naar we hopen, zullen er ook lezers zijn, die de meetkunde geheel om haar zelf beoefenen. Zulke gebruikers van het leerboek hebben natuurlijk in de bij sommige vraagstukken geplaatste sterretjes slechts een indeeling te zien in wat minder ver en wat verder gaande vraagstukken, al is deze indeeling niet steeds uitsluitend het kriterium voor een sterretje geweest. De bedoelde lezers, die zich vrij voelen van de verplichting zich voor een examen voor te bereiden, zullen zich allicht juist tot de wat verder gaande vraagstukken het meest voelen aangetrokken. Een nader aangeven van de vraagstukken, die zich voor zulk een vrije oefening in het

bijzonder leenen, kunnen we overbodig achten; ook is zoo iets niet wel doenlijk, daar de smaken verschillen, waardoor de een in een ander soort vraagstukken behagen zal scheppen dan de andere.

We laten nu enkele methodische opmerkingen over het maken van meetkunde-vraagstukken volgen. Wat de methodiek aangaat, is er een belangrijk verschil waar te nemen tusschen algebra-vraagstukken en meetkunde-vraagstukken, waarbij goniometrie-vraagstukken tot de eerste en trigonometrie-vraagstukken tot de laatste te rekenen zijn.

In de algebra zijn meer volledige algemeene aanwijzingen voor het maken van vraagstukken te geven dan in de meetkunde, waar de zaak met eenige overdrijving wel eens zoo wordt voorgesteld, dat men voor het maken van een meetkunde-vraagstuk een bepaalde hulplijn moet zien, die geheel uit de lucht komt vallen en als een deus ex machina tot de oplossing voert. Inderdaad is het in de meetkunde zeer best mogelijk, dat men de theorie geheel kent, zich goed in het maken van vraagstukken geoefend heeft, zich ook terdege rekenschap gegeven heeft van de verschillende methoden, die men kan volgen, en toch bij een betrekkelijk gemakkelijk vraagstuk de oplossing niet ziet. In de algebra — en nu denken we meer in het bijzonder aan de Ki-algebra — ligt echter het falen bij het maken van een vraagstuk meestal aan het niet voldoende thuis zijn in de theorie, waardoor men soms zelfs niet onmiddellijk ziet in welk hoofdstuk het vraagstuk onder te brengen is en daardoor elk uitgangspunt mist. Tot het thuis zijn in de theorie is hierbij ook te rekenen het kennen van de methodische aanwijzingen, die bij de verschillende typen vraagstukken te volgen zijn. Zulke aanwijzingen of wenken laten zich b.v. voor het bepalen van een limiet of het onderzoek van een reeks op convergentie zeer volledig geven.

Toch laten zich ook in de meetkunde wel eenige algemeene aanwijzingen geven. We laten er hier eenige volgen. We leggen ons hierbij een groote beperking op, daar we voornemens zijn in een afzonderlijk werkje uitvoeriger op de methodiek der wiskunde terug te komen.

Bij een stereometrisch vraagstuk zit de moeilijkheid vaak daarin, dat men zich de zaak niet goed kan voorstellen. Een duidelijke stereometrische teekening kan hier veel verhelpen, maar men moet vooral zijn kracht niet zoeken in de ruimteteekening alleen. Het is meestal aan te bevelen naast de ruimtefiguur een planimetrische figuur te maken, die ontstaat door de ruimtefiguur te snijden met

een vlak, waarin verschillende belangrijke lijnen gelegen zijn. Ook kan men vaak een beteren kijk op het geval verkrijgen door het ontwerpen van een figuur, die ontstaat door op een doelmatig gekozen vlak te projecteeren. Men kieze bij voorkeur dit vlak zoo, dat door het projecteeren een belangrijke rechte in een punt overgaat. Op deze wijze ontstaat wel niet een sprekende figuur, dus geen figuur, die ons onmiddellijk de ruimtefiguur doet zien, maar dit is ook niet de bedoeling der projectie-figuur. Door de logische beschrijving, ondersteund door ons voorstellingsvermogen, moet de projectie-figuur tot de ruimtefiguur aangevuld gedacht worden. Als voorbeeld nemen we een viervlak, geprojecteerd op een vlak, dat loodrecht op een der ribben staat. Men krijgt dan, wat het viervlak zelf aangaat, niets anders te zien dan een driehoek, dus iets, dat niet het beeld van een viervlak opwekt. Toch is deze figuur, juist door haar eenvoudigheid, bij uitstek geschikt om er de verschillende stellingen betreffende het half-gelijkzijdige en het gelijkzijdige viervlak mede te bewijzen. Ook komt het wel voor, dat het voordeelig is op twee verschillende goed gekozen vlakken te projecteeren en een dier vlakken, als in de beschrijvende meetkunde, op het andere neer te slaan.

Bij het uitvoeren der constructie van een punt is het vaak doelmatig van de verschillende gegevens, waaraan het punt heeft te voldoen, er een of meer weg te laten, waardoor een meetkundige plaats ontstaat. Door dit weglaten van gegevens op verschillende wijzen in te richten, komt het gevraagde punt als een doorsnede van meetkundige plaatsen voor den dag. Om deze methode met vrucht te kunnen toepassen, moet men verschillende eenvoudige meetkundige plaatsen kennen, zooals de meetkundige plaats van het punt, waarvan de som der kwadraten van de afstanden tot eenige gegeven punten (die kwadraten eventueel nog met gegeven getallen vermenigvuldigd) een gegeven waarde heeft. Deze meetkundige plaats is in de stereometrie een bol (zie § 161), die in een vlak (op verschillende wijzen op te vatten als machtvlak van 2 bollen) overgaat, als de som der gegeven getallen-coëfficiënten gelijk aan 0 is (zie § 162, 163, 231 en 258). Op deze wijze kunnen b.v. de reeds genoemde vraagstukken 993 en 1105 worden opgelost.

Bij het zoeken naar een meetkundige plaats kan men deze wel eens op het spoor komen door eenige bijzondere punten daarvan te bepalen; dit geschiedt door de veranderlijke elementen op eenvoudige manier te kiezen. Vermoedt men, dat de meetkundige plaats een rechte of een cirkel zal zijn, dan blijkt zoo vaak met welk dier

beide gevallen men te doen heeft. De meetkundige plaats is dan nl. een rechte, als men een punt in het oneindige vindt, en een cirkel, als men 3 niet op één rechte gelegen punten der meetkundige plaats vindt, tenminste als het vermoeden juist blijkt. Intusschen is dit niet erg wetenschappelijk te noemen, maar op een examen kan het wel eens diensten bewijzen.

Heeft men een stelling aan te toonen of een constructie uit te voeren, dan komt het vaak voor, dat stelling of constructie door een transformatie zóodanig te vereenvoudigen is, dat de moeilijkheden zijn weggevallen. Als zoodanige transformaties komen vooral de centrale projectie en de inversie in aanmerking, maar de gelijkvormigheidstransformatie kan ook wel eens van nut zijn (zooals bij de stellingen omtrent den negenpuntscirkel), evenals een draaiing. Door een draaiing kan soms het collineair zijn van punten worden bewezen, als nl. die punten door draaiing uit collineaire punten ontstaan, terwijl verschillende stellingen betreffende het gelijkzijdige of het half-gelijkzijdige viervlak door draaiing van 180° om een symmetrie-as kunnen worden aangetoond.

Ten slotte wijzen we nog op een type constructie-vraagstukken, waaraan onmiddellijk te zien is, dat ze door een homographie of een involutie kunnen worden opgelost, zij het ook, dat men zoo niet steeds de eenvoudigste oplossing verkrijgt. Het is altijd voordeelig direct een weg te zien, die noodwendig tot een oplossing van het vraagstuk voeren moet; het vinden van een eenvoudiger oplossing is dan min of meer bijzaak.

HOOFDSTUK XL.

Poolverwantschap ten opzichte van een bol.

§ **287.** *Zijn P en C punten van een middellijn van een bol, die de snijpunten A en B van den bol met de middellijn harmonisch scheiden.* dan wordt het *vlak V door C loodrecht op de middellijn AB* het **poolvlak** *van het punt P ten opzichte van den bol* genoemd. Omgekeerd heet *P* de **pool** *van het vlak V ten opzichte van den bol.* Is *M* het middelpunt en *r* de straal van den bol, dan voldoen de punten *P* en *C* aan **MP . MC = r²**. Ligt *P* buiten den bol, dan snijdt het poolvlak *V* den bol. Ligt *P* binnen den bol, dan snijdt *V* den bol niet. *Ligt P op den bol, dan is V het raakvlak in P.*

Het poolvlak van het middelpunt van den bol is het vlak in het oneindige. Het poolvlak van een punt in het oneindige is het vlak door het middelpunt M loodrecht op dat punt.

Op de aangegeven wijze krijgt men een (1,1)-*correspondentie tusschen de punten en de vlakken der ruimte.* Deze wordt weer **poolverwantschap** genoemd, maar nu *ten opzichte van een bol.*

§ **288.** Snijdt men den bol van § 287 door een vlak, dat door de rechte *MP* gaat, dan is de snijlijn *p* van dit vlak met het poolvlak *V* de poollijn van *P* ten opzichte van den grooten cirkel, volgens welken het door *MP* gaande vlak den bol snijdt. Omgekeerd kan men het poolvlak van een punt ten opzichte van een bol voor den dag brengen door uit te gaan van de poollijn van een punt *P* ten opzichte van een cirkel en de figuur om de door *P* gaande middellijn van den cirkel te wentelen.

Op de aangegeven wijze kunnen verschillende stellingen omtrent pool en poollijn op pool en poolvlak worden overgedragen. Vooreerst heeft men:

Trekt men door een punt P een rechte, die den bol snijdt, dan wordt de zoo verkregen koorde van den bol harmonisch verdeeld door P en het poolvlak van P.

Dit blijkt uit de stelling van § 276 door een vlak aan te brengen door de door *P* getrokken rechte en het middelpunt van den bol.

Ligt *P* binnen den bol, dan is het poolvlak van *P de meetkundige plaats van het punt, dat op een veranderlijke door P getrokken rechte harmonisch toegevoegd is aan P ten opzichte van de snijpunten der rechte met den bol.*

M. Rechtstreeks of tegengesteld gelijkvormige vlakke figuren.

HOOFDSTUK L.

Rechtstreeks gelijkvormige figuren in een vlak.

§ **398.** We beschouwen 2 in één vlak gelegen rechtstreeks gelijkvormige figuren, waarin congruentie als bijzonder geval ligt opgesloten. Zooals in § 196 gebleken is, kan elk punt van het vlak als punt van de eene figuur, maar ook als punt van de andere figuur worden opgevat. Met elk punt van de eene figuur correspondeert één punt van de andere en omgekeerd. Vallen correspondeerende punten samen, dan spreekt men van een **coïncidentiepunt.**

Zijn A, A' niet samenvallende in het eindige gelegen correspondeerende punten, evenals B, B', en is O een in het eindige gelegen coïncidentiepunt, dan zijn de driehoeken OAB en $OA'B'$ rechtstreeks gelijkvormig. Bijgevolg is $OA : OA' = OB : OB'$ en $\angle AOB = \angle A'OB'$, lettend op den draaizin. Dus is $\angle AOA' = \angle BOB'$, eveneens lettend op den draaizin, *zoodat ook de driehoeken* AOA' *en* BOB' *rechtstreeks gelijkvormig zijn.* Zijn C', D', ... de punten, die resp. met C, D, ... correspondeeren, dan zijn natuurlijk ook de driehoeken COC', DOD', ... rechtstreeks gelijkvormig met $\triangle AOA'$. De punten A, B, C, D, ... gaan dus resp. in A', B', C', D', ... over *door de voerstralen vanuit* O (dus OA, OB, ...) *een zelfden hoek* φ *om* O *te draaien en de lengten dier voerstralen alle met een zelfden factor* $f (= A'B' : AB)$ te *vermenigvuldigen.* De transformatie is dus een *vermenigvuldiging, vanuit* O, *gecombineerd met een draaiing om* O; in welke volgorde vermenigvuldiging en draaiing worden uitgevoerd, is onverschillig.

Is de draaiingshoek φ gelijk aan 0 of 180°, dan heeft men het in § 201 beschouwde geval. De transformatie is dan een gelijkvormigheidstransformatie met centrum O en een factor f of $-f$, al naar gelang $\varphi = 0$ of $\varphi = 180°$ is. Behalve O zijn dan ook alle punten in het oneindige van het vlak coincidentiepunten.

Is de draaiingshoek niet 0 en niet 180° (waarbij natuurlijk van een veelvoud van 360° kan worden afgezien), dan is O het eenige coïncidentiepunt der transformatie. Is in het bijzonder de rechtstreeksche gelijkvormigheid een rechtstreeksche congruentie (dus

$f = 1$), dan is de transformatie een draaiing om O over een van 0 en 180° verschillenden hoek.

Dat de transformatie geen 2 in het eindige gelegen coïncidentiepunten kan hebben, blijkt ook onmiddellijk aldus. Zijn O_1 en O_2 die coincidentiepunten en zijn A, A' willekeurige correspondeerende punten, dan zijn de driehoeken O_1O_2A en O_1O_2A' rechtstreeks gelijkvormig (tevens congruent), zoodat A en A' samenvallen. Elk punt van het vlak is dan dus coïncidentiepunt, zoodat de transformatie de identieke is. Dit geval sluiten we natuurlijk uit.

§ **399.** We stellen nu de vraag of de transformatie, die de figuur ABC . . . in de rechtstreeks gelijkvormige figuur $A'B'C'$ . . . omzet, steeds een in het eindige gelegen coïncidentiepunt heeft.

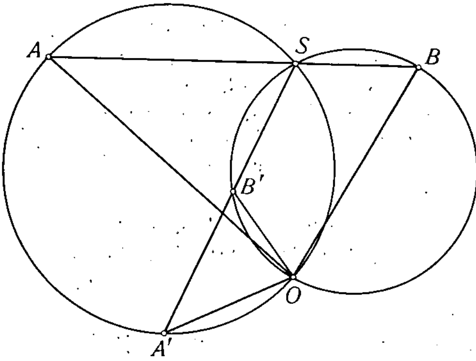


Fig. 216.

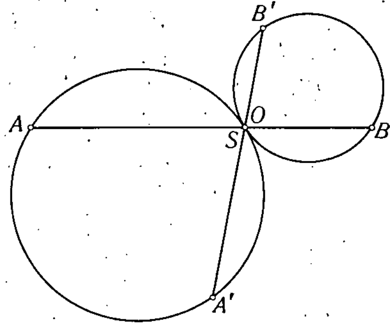


Fig. 217.

Is S het *snijpunt van AB en A'B'*, dan volgt uit de rechtstreeksche gelijkvormigheid der driehoeken OAB en $OA'B'$ (waarin O het gezochte coïncidentiepunt is), dat de rechten AS en AO denzelfden hoek met elkaar maken als $A'S$ en $A'O$; hierbij moeten de rechten als volstralen beschouwd worden, terwijl gelet moet worden op den draaizin der hoeken. De meetkundige plaats van het punt O, dat de genoemde eigenschap heeft, is de *cirkel* $AA'S$ (zie fig. 216); valt S in A, dan is die cirkel op te vatten als de cirkel door A en A', die in A aan AB raakt. Evenzoo ligt O op den *cirkel door* B, B' *en* S, zoodat O het (in het algemeen) van S verschillende snijpunt van beide cirkels is. We vinden dus:

De in één vlak gelegen rechtstreeks gelijkvormige figuren AB . . . en A'B' . . . hebben tot coïncidentiepunt O het 2de. snijpunt der cirkels AA'S en BB'S, waarin S het snijpunt van AB en A'B' is.

Raken de cirkels elkaar in S aan (zie fig. 217), dan valt O in S.

REGISTER.

De getallen — behalve de jaartallen tusschen haakjes — verwijzen naar de bladzijden.

Prof. Dr. C. E. Weaterburn schrijft in „The mathematical Gazette":

„This new edition" „represents a much wider treatment of the subject than that contained in the first edition, both in generality and in the number of topics undertaken. Still, as the authors mention in their Preface, they have intentionally limited the range of the work so as to exclude the geometries of Finsler and Berwald, as well as projective and conformal differential geometries."

„A large number of important and useful examples are given throughout the text, and their solutions are indicated at the end of the volume. Many of the examples are really additional theorems. There is a Bibliography of ten pages which, though not intended as a complete one, will prove very useful to the reader. An index of seven pages should also be very helpful; and a careful reading of the proofs has made it possible to print a short list of errata at the end of the book. The dedication is very appropriately to Dr. Tullio Levi-Civitá, who is one of the outstanding figures in this field of work."

„A book, writen by two men who have contributed so much to the development of the subject, is obviously a valuable addition to its literature." „We confidently recommend it to every mathematician who is interested in Differential Geometry."

Prof. Dr. E. Bortolotti schrijft in „Bollettino dell' Unione Matematica Italiana":

„Nonostante le origini italiane le „geometrie a connessione", substrato geometrico di molte recenti theorie fisiche, si sono poi sviluppate specialmente all' estero. È desiderabile che anche qua in Italia si riprenda interesse a quest' ordine di ricerche; e ciò particolarmente ora che, consolidato ormai e liberato da molte sovrastrutture ingombranti il formalismo, lasciate quindi da parte le sterili considerazioni di metodo e di forma, ci si può infine accingere ad approfondire l'essenza geometrica dei nuovi enti. Perciò è da augurarsi che superando con un poco di buona volontà quel senso di ripugnanza iniziale che l'aspetto esteriore un po' macchinoso del formalismo può destare, si legga anche fra noi la „Einführung". Si riconoscerà che almeno nella sua attuale struttura — dopo che lo Schouten, tempra robusta di ricercatore, in una quindicina d' anni di fervida operosità ne ha fatto esperienza attraverso agli sviluppi di una ricca produzione — l'apparato formale per le nuove geometrie appare elaborato in modo così parco, razionale e avveduto da constituire, nelle mani di chi vi abbia preso un po' di famigliarità, un duttile e agevole strumento di ricerca."

Prof. Dr. D. van Dantzig schrijft in „Nieuw Archief voor Wiskunde":

„Die wesentlichsten Vorteile des Ricci-Kalküls sind: erstens die leichte Lesbarkeit; zweitens die (auch der direkten Analysis zukommenden) Eigenschaft, invariantentheoretisch begründet zu sein, sodass die Gleichungen unabhängig vom Koordinatensystem bestehen; drittens die Leichtigkeit mit der man die Gleichungen auf irgendein spezielles Koordinatensystem spezialisieren kann (was für die Anwendung auf spezielle geometrische und physikalische Probleme nötig ist). Immerhin stellte es sich heraus, dass der Kalkül noch der Erweiterung bedürftig war. Es ist deswegen sehr erfreulich, dass Schouten" „den Ricci-Kalkül mit seiner Kern-Index-Methode bereicherte." „Genau genommen bedeutet die Kern-Index-Methode nur eine geringfügige Änderung der Bezeichnungsweise; die bedeutendste Änderung besteht darin, dass für die Transformationsgrössen $P^k_{.\lambda}$, $Q^k_{.\lambda}$ jetzt $A^{k'}_{\lambda}$, $A^k_{\lambda'}$, geschrieben wird; technisch gestattet sie eine viel grössere Freiheit in der Zuerteilung von Koordinaten zu den geometrischen Grössen; inhaltlich aber . . . . man bedenke wie sehr Leibniz durch das Hinzuschreiben des *dx* zum Integralzeichen, eine rein formale Änderung seiner ursprünglichen Bezeichnungsweise also, zur begrifflichen Klärung des Integralbegriffes beigetragen hat . . . . leistet sie, zusammen mit der Ausarbeitung des von O. Veblen eingeführten Begriffes des geometrischen Objektes, eine beträchtliche begriffliche Klärung der Transformationstheorie."

„Inhaltlich unterscheidet sich die zweite Auflage sehr stark von der ersten, vor allem dadurch, dass viel tiefer auf die behandelten Fragen eingegangen wird, und dass viel Neues hinzugekommen ist, wodurch auch die Zerlegung in zwei Bände nötig wurde. Zwar hat dadurch das Buch etwas von seinem elementaren Charakter verloren; es ähnelt viel mehr dem „Ricci-Kalkül" als der ersten Auflage der „Einführung", ist aber nicht so schwierig zu lesen als der R.-K. Von den beiden Büchern muss es sich dadurch unterscheiden, dass vieles aufgenommen wurde, das erst nach 1924 veröffentlicht wurde. Manches davon wird hier überhaupt zum ersten Male in einem Lehrbuch aufgenommen."

den eersten, dus is $\triangle$ MAD $\cong$ $\triangle$ MAB, dus MD $= c$. Nu is MA $=$ MB $= c$, dus is $c = r$.

4. Het eenvoudigste wordt de constructie echter, als wij op een bijzondere wijze van de inversie gebruik maken. Neem daartoe O van den grondcirkel op den omtrek van den gegeven cirkel. Laat $(O)r$ dezen cirkel in A en B snijden. Teeken het spiegelpunt M′ van O t.o. van AB. Het t.o. van cirkel $(O)r$ geinverteerde punt M van M′ is dan het gezochte middelpunt.

9. AANHANGSEL.

Uitsluitend gebruik van de lineaal. Wij zullen aantoonen, dat dit mogelijk is bij de constructies van *alle dubbelverhoudingen, die rationaal in gegeven dubbelverhoudingen zijn uit te drukken.*

Vooreerst herinneren we er aan, dat het construeeren van het vierde harmonische punt tot drie op een rechte gegeven punten A, B en C of het construeeren van den vierden harmonischen straal tot drie gegeven stralen PA, PB en PC kan geschieden met een volledige vierzijde.

Verder is het eenvoudig om, als men heeft twee willekeurige lijnen, terwijl op de eene liggen de punten A, B, C en D en op de andere A′, B′ en C′, dan op deze D′ zoo te construeeren, dat (A′B′C′D′) = = (ABCD). Aldus (zie fig. 23):

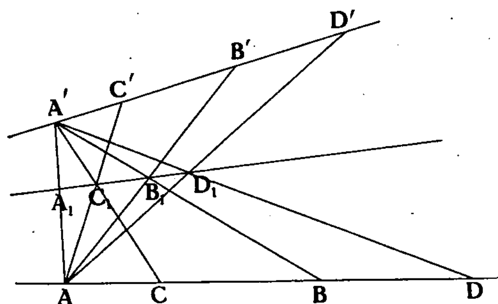


Fig. 23.

De constructie is duidelijk. Uit D_1 volgt D′, (A′B′C′D′) = = $(A_1B_1C_1D_1)$ = (ABCD). Mochten A, B, C, D en A′, B′, C′ collineair zijn, dan kan men (ABCD) op een andere lijn overbrengen en de dan verkregen dubbelverhouding weer op de eerste lijn. Een toepassing uit vele: gegeven 5 punten van een kegelsnede, gevraagd de raaklijn in een der punten aan de kegelsnede te construeeren. Men bedenke dan, dat een kegelsnede de meetkundige plaats is van het snijpunt van toegevoegde stralen van twee projectieve stralenbundels terwijl een raakpunt als tweevoudig punt is te beschouwen.

Van belang is verder

$$(ABCD) . (ABDC) = 1$$
$$(ABCD) + (ACBD) = 1$$
$$(ABCD) + (ABCD') \ 0, \text{ waarbij } (ABDD') = -1.$$

Want nu is
(ABCD) + 1 = 1 — (ABCD′) = (ACBD′)
(ABCD) — 1 = — (ACBD) = (ACBD″), waarbij (ACDD″) = — 1.
Verder te vinden
(ABCD) + (PQRS) = $\lambda + \mu$. Maak (ABCD$_1$) = $\lambda + 1$ en (ADD$_1$E) = μ, dan blijkt na eenige herleiding, dat (ABCE) = $\lambda + \mu$. Aldus: Zij AB = b, AC = c, AD = d, AD$_1$ = d_1, AE = e, dan is

$$\frac{c}{c-b} : \frac{d_1}{d_1-b} = \frac{c}{c-b} : \frac{d}{d-b} + 1.$$

Hieruit volgt

$$d_1 = \frac{bcd}{bc - cd + bd} \text{ en dus } \mu = \frac{d_1}{d_1 - d} : \frac{e}{e-d} = \frac{bc}{d(c-b)} : \frac{e}{e-d}.$$

Dan volgt:

$$\lambda + \mu = \frac{c}{c-b} : \frac{d}{d-b} + \frac{bc}{d(c-b)} : \frac{e}{e-d} = \frac{c}{c-b}\left(\frac{d-b}{d} + \frac{b(e-d)}{de}\right) =$$
$$= \frac{c}{c-b} : \frac{e}{e-b}.$$

Is (ABCD) = λ en (ABCE) = μ, dan is direct (ABED) = $\frac{\lambda}{\mu}$. terwijl voor (ABCD) = λ en (ABDE) = μ men heeft (ABCE) = $\lambda\mu$,

Het zal duidelijk zijn, dat men nu ook uitdrukkingen kan construeeren, waarbij λ, μ of beide van teeken zijn veranderd.

Alle rationale getalwaarden kan men nu ook verkrijgen, door de constructies toe te passen op (ABCC) = 1.

Hieruit blijkt voldoende — men passe het bovenstaande maar voldoende vaak toe — de juistheid van de vooropgestelde bewering.

Nemen wij nu eens aan een assendriehoek $A_1A_2A_3$ en daarin het eenheidspunt E. Zij P een punt in het vlak van den driehoek gelegen. Denk uit E de loodlijnen e_1, e_2 en e_3 en uit P de loodlijnen p_1, p_2 en p_3 op de zijden neergelaten. Laten E_1, E_2 en E_3 de snijpunten van A_1E, A_2E en A_3E; P_1, P_2 en P_3 de snijpunten van A_1P, A_2P en A_3P met de zijden zijn. Stellen we nu $\frac{p_1}{e_1} = x_1$, $\frac{p_2}{e_2} = x_2$ en $\frac{p_3}{e_3} = x_3$, waardoor x_1, x_2 en x_3 homogene coördinaten van P worden, dan heeft men, dat de dubbelverhouding

$$\xi_1 = \frac{A_3P_1}{A_2P_1} : \frac{A_3E_1}{A_2E_1} = \frac{x_2}{x_3}, \ \xi_2 = \frac{x_3}{x_1}, \ \xi_3 = \frac{x_1}{x_2}.$$

Stel nu, dat men een vraagstuk heeft, waarbij punten en rechte lijnen door middel van homogene coördinaten (een lijn is immers $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$) in rationale waarden gegeven zijn, terwijl dan een gevraagd punt of een rechte lijn *rationaal* in die homogene coördinaten is uit te drukken, dan kan men, uitsluitend met de lineaal, de ξ's construeeren, die ons in staat stellen om de gevraagde punten

en lijnen te teekenen. Want bekende grepen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. . . . zal men kunnen omzetten in $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \frac{\alpha_2}{\alpha_3}, 1\right)$, enz., waardoor met-de-lineaal-construeerbare dubbelverhoudingen uitgedrukt worden, laat 't zijn op verschillende zijden van den assendriehoek. Een rationale

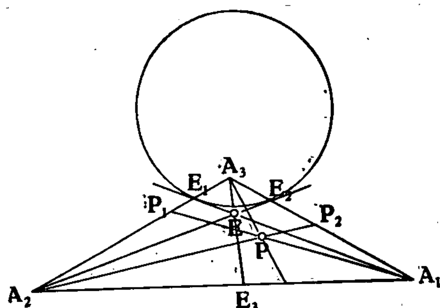


Fig. 24.

functie daarvan is volgens het boven gezegde dan ook op de gewenschte wijze te construeeren.

Treden echter in den te construeeren vorm *vierkantswortels* op, zooals dat in de coördinaten van de snijpunten van gegeven cirkels en rechten en in die van gegeven cirkels onderling kan plaats hebben, dan komt men met de lineaal alleen niet meer uit. Maar nu nemen we eens *een cirkel*[1]), *die* $\triangle$ A_1 A_2 A_3 tot pooldriehoek heeft. *We spreken af, dat we het middelpunt geen rol laten spelen.* De vergelijking van zoo'n cirkel is, bij de keuze van een geschikt eenheidspunt E, waarbij E_1 en E_2 op den cirkel liggen:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2. \,^{2)}$$

Laat nu een rechte lijn $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ dezen cirkel snijden, dan treedt in de coördinaten van de snijpunten steeds op $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}$. En nu laten zich a_1, a_2 en a_3 wel zoo kiezen, dat deze wortel een gegeven grootte krijgt.

Het blijkt dus, dat elke opgave, waarbij de gegevens projectief in rationale waarden zijn vastgelegd, met behulp van de lineaal construeerbaar is, mits men over een vasten cirkelomtrek beschikt.

Wij zullen op de oplossing van zuiver projectieve opgaven niet verder ingaan. De grond, waarom we hier niet tot metrische opgaven kunnen overgaan, is blijkbaar hierin gelegen, dat we het middelpunt van den cirkel missen, het midden dus van een constant lijnstuk van willekeurige richting. Daarmede missen we het vierde harmonische punt tot drie punten op zoo'n middellijn en dat is het oneindig verre

---

1) Onnoodig en onpractisch is het, wat we echter wel kunnen doen, door in 't algemeen een kegelsnede te nemen.

2) Zie b.v. Wolff, Inl. t. d. Anal. Meetk. v. h. pl. vlak, blz. 167, regel 9.

punt daarvan, d.w.z. het snijpunt met een parallele daaraan. Hiermede missen we ook het middel om een dubbelverhouding in een verhouding van twee lijnstukken te laten overgaan. Verder missen we ook de verbindingslijn der oneindig verre punten, de poollijn van het middelpunt, de verbindingslijn der oneindig verre cirkelpunten; tevens missen we de hoofdstralen der involutie van een bundel van paren loodrecht op elkaar staande stralen: we missen dan ook den rechten hoek.

De vraag zou gedaan kunnen worden, wat voor *paedagogisch* nut het wel heeft om constructies met de besproken beperkingen uit te voeren. Zooals bij *alle* wiskunde-onderwijs is ook hier paedagogisch nut aanwezig, en wel thans *het leeren met gegeven middelen van allerlei aard in het leven dat te bereiken, wat daarmede te bereiken valt.* De mathematicus weidt echter niet gaarne uit over deze zijde van zijn onderwijs, overtuigd als hij is, dat hij beter doet paedagogisch te *handelen* dan over paedagogiek te *praten.*

BOEKBESPREKINGEN.

Ir. C. VAN DROOGE, *Leerboek der Mechanica* met vraagstukken. Bussum, Van Dishoeck [1938]. 7e druk, 266 bladzijden; prijs *f* 3,50.

Geruimen tijd geleden, in 1925, heb ik in het Bijvoegsel van het N. T. v. W. een artikeltje doen verschijnen, getiteld „Eenige opmerkingen over het onderwijs in de mechanica" [1]); die opstel bleek uiting te geven aan meeningen, die door velen gedeeld werden, en heeft zoodoende een merkbaren invloed op het mechanica-onderwijs gehad. De fouten, die er in gesignaleerd werden, komen in sedert verschenen boeken niet meer voor, en werden in herdrukken van vroeger verschenen leerboeken verbeterd. Indien er echter één boek is, waaraan de invloed van dit artikel en van de daarop gevolgde discussies geheel is voorbijgegaan, dan is het wel het Leerboek dér Mechanica van Ir. Van Drooge. Vrijwel alle fouten, waartegen ik destijds te velde trok, heb ik in den laatsten druk aangetroffen. Ik noem slechts de allervoornaamste: verwarring van vectoroptelling met samenstelling van bewegingen, miskenning van de betrekkelijkheid van beweging, baan, snelheid, e.d., groote vaagheid en verwardheid in de uiteenzetting der grondbeginselen van de dynamica, afleiding der samenstelling van krachten uit de samenstelling van bewegingen. Vergelijkt men dezen zevenden druk met den tweeden (1920), dan blijkt er weinig veranderd te zijn; het zou echter onbillijk wezen, te verzwijgen, dat de nieuwe § 186, bevattende algemeene opmerkingen omtrent de beweging van een vast lichaam, eene verbetering van beteekenis brengt.

Het boek is een typisch niet-epistemisch schoolboek: het doel is blijkbaar, den leerlingen de middelen te verschaffen tot het maken van vraagstukken; op welke wijze de hiertoe noodige stellingen en formules worden afgeleid, doet niet ter zake. Een formidabele fout als de bewering (§ 145), dat als een lichaam zich onder den invloed van een krachtenstelsel nul beweegt, deze beweging eenparig rechtlijnig is, hindert dan ook niet, omdat de leerlingen toch geen vraagstukken over de Poinsot-beweging krijgen.

Ik aarzel niet, dit boek *zeer slecht* te noemen; leeraren, die zich uitsluitend ten doel stellen, hunne leerlingen te trainen in het maken van vraagstukken, kunnen het misschien gebruiken.

J. H. S.

Dr. P. G. J. VREDENDUIN, *Stereometrie*. Arnhem, „Rijnstad", [1938]. 176 bladz.; prijs met atlas *f* 2,30 (atlas afzonderlijk *f* 0.45).

Het boek van den heer Vredenduin onderscheidt zich van de oudere

[1]) II, bladz. 54, e. v.

stereometrieboeken allereerst door de volgorde, waarin de onderwerpen behandeld worden. Er is gebroken met de gewoonte, om eerst de veelvlakken af te handelen, met inhoudsbepaling en al; om daarna eerst tot de behandeling van de gebogen oppervlakken over te gaan. Het werk is verdeeld in vier deelen: deel I behandelt lijnen en oppervlakken, daaronder bol, cylinder en kegel als oppervlakken, alsmede de kegelsneden, deel II behandelt de lichamen, namelijk de veelvlakken (waaronder de regelmatige), cylinder, kegel en bol, deel III geeft de inhoudstheorie, en deel IV de meetkunde op het bolvlak, waaronder ook de drievlakshoek ressorteert. In deel III wordt van integraalrekening gebruik gemaakt, de verschuiving der inhoudsberekeningen naar de leerstof der vijfde klasse heeft het voordeel, dat dit mogelijk wordt.

Het boek is geschreven met bekwaamheid, nauwgezetheid, met eenige vrijmoedigheid ten aanzien van de traditie, en, wat wel het meest beteekent, met toewijding. De belangstellende lezer zal er verscheidene bewijzen van vinden, als hij het boek doorleest. Mij heeft de fraaie behandeling der meetkundige plaatsen het sterkst getroffen, terwijl ik ook de inhoudsberekeningen met en zonder integraalrekening met genoegen heb gelezen. Het atlasje, een werkschrift voor stereometrisch teekenen, verdient ook waardeering. Mijne bezwaren tegen het boek zijn tweeërlei; ten eerste had de schrijver mijns inziens nog vrijer kunnen staan tegenover de traditie. Wel ontbreken gelukkig de defectieve bewijzen van eenige eigenschappen van algemeene cylinder- en kegeloppervlakken, maar de ontwikkeling van kegel- en cylindermantel zijn gehandhaafd; twee stellingen moeten zonder bewijs worden meegedeeld (67 en 68) en in elk daarvan treedt een niet gedefinieerd begrip op; stelling 69 is niet geheel juist. Hier zijn concessies gedaan aan de zucht tot het maken van vraagstukken, die volstrekt niet van elementair karakter zijn, maar zich verheugen in de sympathie van de samenstellers der eindexamensommen. Ook de stelling van Euler had gemist kunnen worden. — Een ernstiger bezwaar is echter de overdreven beknoptheid die de uiteenzetting van eenige onderdeelen vertoont. Ik geef direct toe, dat het zeer moeilijk is, den juisten middenweg te vinden. Aan den eenen kant is de leerstof der stereometrie zeer uitgebreid, aan den anderen kant eischen de practijk en de geest des tijds samenpersing in een beknopt volume. Een leerboekschrijver loopt altijd gevaar, de behandeling te breed te maken. Het komt mij echter voor, dat de heer Vredenduin in het andere uiterste vervallen is: eene zoo beknopte behandeling van den loodrechten stand van twee vlakken, als hij geeft, heb ik nog nooit eerder gezien. Dit zijn echter gebreken, die de schrijver — ondersteld dat hij ze als zoodanig erkent — gemakkelijk kan verhelpen zonder dat het karakter van het geheele werk wordt aangetast. Wij wenschen het boek hierom, maar vooral om zijne vele goede eigenschappen een spoedigen tweeden druk toe.

J. H. S.

P. DE VAERE en V. HERBIET, *Driehoeksmeting.* Namen, Wesmael—Charlier, 1938. 250 bladzijden.

Dit boekje bevat op 250 dichtbedrukte bladzijden ongeveer de leerstof van de groote leerboeken, die hier te lande in gebruik zijn (Wijdenes, Verrijp). De indeeling doet vooral denken aan die van den laatsten druk van Verrijp's werk: aan de behandeling der goniometrie gaat eene zeer beknopte behandeling van de driehoeksmeting vooraf, die zoo eenvoudig mogelijk gehouden is, en hier Kern der Driehoeksmeting wordt genoemd. Het boek is echter zoodanig ingericht, dat deze inleiding desgewenscht kan worden weggelaten, daar er verder niet naar wordt verwezen. Daarna volgen de goniometrie en de driehoeksmeting, die streng gescheiden zijn gehouden. In de goniometrie wordt het argument der functies als een getal (niet als een hoek) behandeld, en hier wordt ook veel van radialen gebruik gemaakt. Sinus en cosinus worden gedefinieerd als ordinaat en abscis van een punt op den georiënteerden eenheidscirkel, terwijl het argument als maat van een boog op dien cirkel wordt gedefinieerd. — De behandeling is duidelijk en nauwkeurig, zooals wij van deze auteurs gewend zijn. Ik krijg den indruk, dat de Belgische schrijvers van leerboeken dit voordeel hebben op hunne Nederlandsche collega's, dat eene zekere, aan de duidelijkheid zoo bevorderlijke, uitvoerigheid hun niet euvel geduid wordt. Kennismaking met dit boek acht ik voor de Nederlandsche leeraren aanbevelenswaardig, zoowel wegens den opzet van het boek als wegens de behandeling van detailpunten.

J. H. S.

P. WIJDENES, *De Kegelsneden voor het M. O.* Groningen—Batavia, P. Noordhoff, [1938]. 53 bladzijden, prijs *f* 0,80.

In dit boekje heeft de heer Wijdenes op eenvoudige en duidelijke wijze behandeld, wat het nieuwe programma voorschrijft met betrekking tot de planimetrische en stereometrische bespreking der kegelsneden. Planimetrisch gaat de behandeling uit van de definitie als meetkundige plaats der punten, waarvoor som of verschil der afstanden tot twee brandpunten constant is, maar ook de definitie met behulp van brandpunt en richtlijn wordt even besproken, en er worden eenige bladzijden gewijd aan de vergelijkingen in poolcoördinaten; dit lijkt mij zeer juist, daar deze vergelijkingen in belangrijke toepassingen op den voorgrond treden. De stereometrische behandeling wordt voorafgegaan door eene korte uiteenzetting van eene bepaalde teekenmethode, die verder in het boekje consequent is toegepast. De behandeling is beknopt en bondig; dat zij toch nog 14 bladzijden beslaat is een gevolg van de opneming van een zestiental groote, duidelijke en bijzonder fraaie figuren. Een enkele bladzijden groot aanhangsel, van de hand van Dr. Dijksterhuis, handelend over de namen der kegelsneden en een paar historische aanteekeningen, besluit het werkje. Ten gerieve der gebruikers zijn een drietal cartonnen teekenmodellen bijgevoegd.

J. H. S.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van den schrijver:

Dr JOH. H. WANSINK, *Repetitie-werkschrift voor de Beschrijvende Meetkunde* . . . . *f* 0,90

Van de Vereniging voor Kadaster en Landmeetkunde:

Afl. 2 en 3 van de 54e Jg van het Tijdschrift.
Afl. 3 van het 1e deel van het bijblad: Fotogrammetrie.

Van P. NOORDHOFF, Groningen:

Compositio Mathematica. Vol. 5 fasc. 2 en 3. Opv. 9 vel en 11 vel; artikelen van

Erich Rothe (Oskaloosa U. S. A.), Mayer and Thomas (Princeton), Pinl (Praag), Schilt (Biel), Samelson (Zürich), Chogoshvili (Moskou), Freudenthal (Amsterdam), Van Heemert (Hilversum), Kaplan (Jamaica Plain U. S. A.), Hopf (Zollikin, Schweiz), Turing (Princeton), Remak (Berlin), Levitzki (Jeruzalem), Hebroni (Jeruzalem), Kantorovitch (Leningrad), Sidon (Budapest), Erdélyl (Brno, C.S.R.), Rogosinski (Cambridge).

Ieder, die zich bezig houdt met een of andere tak van de hogere wiskunde, in de hoogste gebieden, moet intekenen op dit tijdschrift.

G. H. KOUDIJS en A. J. LIEFKENS, *Onze technische serie Rekenen* I en II elk . . . . *f* 0,65

Prof. Dr F. SCHUH, *Leerboek der Nieuwere Meetkunde van het vlak en van de ruimte;* . . . . geb. *f* 10,50
Voor intekenaren op de tijdschriften . . . . - 9,—
Bespreking volgt in Jg XV; reeds nu wordt met aandrang de raad gegeven aan onze lezers zich dit kostelijk boek aan te schaffen.

Dr E. J. DIJKSTERHUIS, *Archimedes* deel I; deel VI van de Historische Bibliotheek, ... geb. - 4,50
Voor intekenaars op de tijdschriften . . . . - 3,90

DE STELLING VAN MORLEY IN VERBAND MET EEN MERKWAARDIG SOORT ZESHOEKEN

DOOR

J. VAN IJZEREN.

---

1. Voor de trisectricen van een willekeurige driehoek geldt, naar men weet, de volgende stelling (zie fig. 1):

de snijpunten P_a, P_b en P_c van de naar BC, CA resp. AB toegewende trisectricen vormen een gelijkzijdige driehoek.

Een aantal bewijzen hiervan is bijeengebracht in Euclides Jaargang 9, waar tevens verwezen wordt naar de Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society vol. XXXII 1913/14. F. G. Taylor en W. L. Marr behandelen daarin: „The Problem of Morley" en een aantal bijbehoorende eigenschappen. Het blijkt, dat Prof. Morley omstreeks 1900 een stelling gevonden heeft, waarvan de bovenstaande slechts een onderdeel is. Deze uitgebreide stelling werd door F. G. Taylor en W. L. Marr een twaalftal jaren later zelfstandig gevonden en met analytische meetkunde bewezen.

Niet bekend met deze precedenten is schrijver dezes eveneens tot de uitgebreide stelling gekomen en wel langs zuiver meetkundige weg; zie Nieuw Archief voor Wiskunde 2^0 reeks Deel XIX 3e en 4e stuk, 1938.

Bepalen wij ons voorloopig tot de bovenstaande niet-uitgebreide stelling. Door meetkundig te werk te gaan blijkt, dat deze „lastige" stelling op een eenvoudig principe berust. Om dit duidelijk te maken is het niet noodig *projectieve* meetkunde te gebruiken, zooals in het Nieuw Archief. Met eenvoudige hulpmiddelen blijkt misschien nog beter, hoe eenvoudig deze stelling van Morley, in wezen is.

Het volgende geeft: 1^0 een elementair bewijs; 2^0 een beschouwing, waaruit een tweede bewijs en een omkeering van de stelling volgen.

2. Gemakkelijk zal men in fig. 1 aan zeshoek $S_aP_bS_cP_aS_bP_c$ de volgende twee eigenschappen constateeren.

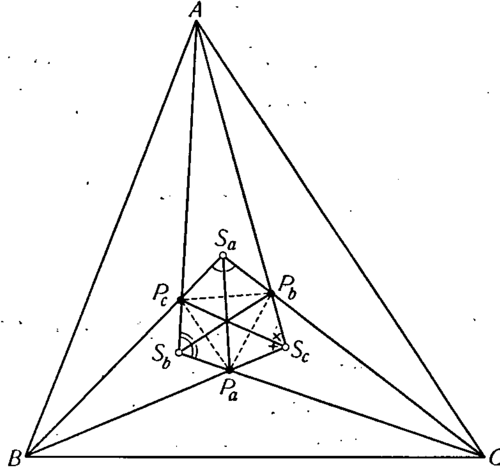


Fig. 1.

I. S_aP_a, S_bP_b opv. S_cP_c zijn deellijn van $\angle S_a$, $\angle S_b$ opv. $\angle S_c$.
II. S_aP_a, S_bP_b en S_cP_c maken onderling hoeken van 60°.

Aan de figuur ziet men ook, dat S_aP_a, S_bP_b en S_cP_c concurrent zijn; dit te bewijzen is de zaak, waar het om gaat.

Beschouwen wij eens nader: zeshoeken met de eigenschappen

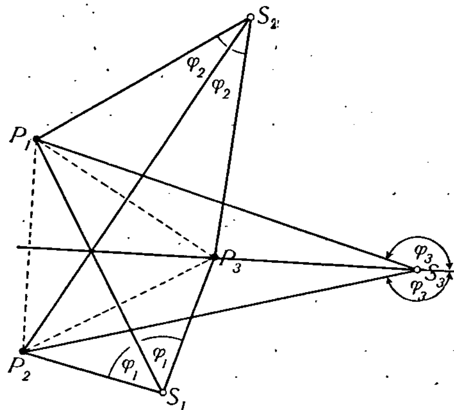


Fig. 2.

I en II. Zoowel fig. 2 als fig. 3 stelt er een voor. Blijkbaar zijn er twee soorten:

1°. zeshoeken (I II) met concurrente diagonalen (fig. 2).
2°. zeshoeken (I II) met niet-concurrente diagonalen (fig. 3).

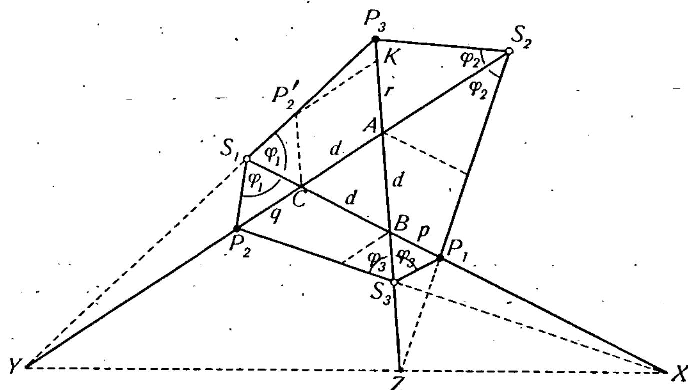


Fig. 3.

Het belang van deze indeeling blijkt uit de volgende stellingen:

1°. *Om zeshoeken (I II) met concurrente diagonalen kan in het algemeen geen kegelsnede beschreven worden.*

Bewijs. Als P_1, P_2, P_3, S_1 en S_2 vastgehouden worden, dan blijven de eigenschappen I en II gelden, al verschuift men S_3 langs zijn diagonaal. S_3 behoeft dus geenszins op de kegelsnede door P_1, P_2, P_3, S_1 en S_2 te liggen; q.e.d.

2°. *Om zeshoeken (I II) met niet-concurrente diagonalen kan steeds een kegelsnede beschreven worden.*

Bewijs (zie fig. 3). Spiegel P_2 t.o.v. S_1P_1, dan valt het spiegelpunt P_2' op S_1P_3 en is $P_2'C$ // P_3A. Uit de gelijkvormigheid van

$\triangle P_3AY$ en $\triangle P_2'CY$ volgt $\frac{CY}{AY} = \frac{q}{r}$.

Analoog: $\frac{AZ}{BZ} = \frac{r}{p}$ en $\frac{BX}{CX} = \frac{p}{q}$.

Dus: $$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \left(-\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{q}{r}\right)\left(-\frac{r}{p}\right) = -1.$$

Volgens Menelaus zijn X, Y en Z dus collineair.

Dus $S_1P_1S_2P_2S_3P_3$ is een Pascalsche zeshoek; m.a.w. P_1, P_2, P_3, S_1, S_2 en S_3 liggen op een kegelsnede; q.e.d.

3. Met dit stellingenpaar is de stelling van Morley ineens

bewezen. Immers (zie fig. 1) om $S_aP_bS_cP_aS_bP_c$ kan geen kegelsnede beschreven worden (A, B en C zijn niet collineair!). Dus gaan S_aP_a, S_bP_b en S_cP_c door één punt.

Hieruit volgt direct (evenals in fig. 2), dat P_a, P_b en P_c een gelijkzijdige driehoek vormen.

4. Dit bewijs toont aan, dat het eigenlijk in de eerste plaats om de zeshoeken (I II) gaat; de stelling van Morley is eenvoudig een direct gevolg van het feit, dat de zes trisectricen een zeshoek (I II) vormen. Komt men in een of andere figuur een zeshoek (I II) tegen, waarom geen kegelsnede beschreven kan worden, dan gaat dezelfde redeneering op. Bv. fig. 4: $S_aP_bS_cP_aS_bP_c$, een

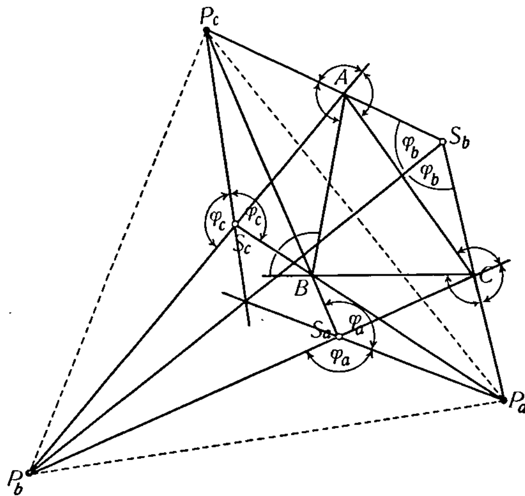


Fig. 4.

zeshoek gevormd door een ander zestal trisectricen van △ ABC (zie de uitgebreide stelling in het Nieuw Archief); eigenschap I blijkt aldus: P_a is middelpunt van een aangeschreven cirkel van △ BS_aC, want BP_a is bissectrix van ∠ S_aBC en CP_a is (buiten-) bissectrix van ∠ BCS_a; dus S_aP_a is bissectrix van ∠ S_a; analoog voor S_bP_b en S_cP_c. Eigenschap II blijkt door narekenen van de hoeken. A, B en C zijn weer snijpunten van overstaande zijden; dus — zie 3 — S_aP_a, S_bP_b en S_cP_c gaan door één punt; △ $P_aP_bP_c$ is gelijkzijdig.

Nu hebben de zeshoeken (I II) nog meer eigenschappen dan de

boven bewezene. Door een andere eigenschap te gebruiken komen wij tot een 2e bewijs van de stelling van Morley en tot de omkeering daarvan.

5. Elke zeshoek (I II) heeft bij de hoekpunten S telkens twee paar gelijke hoeken. Beschouwen wij deze eens nader. Neem een zeshoek (I II) met concurrente diagonalen (fig. 2) en verschuif de punten S langs hun diagonaal totdat een regelmatige zeshoek ontstaat: de hoeken φ zijn na die verschuiving halve „binnen"-hoeken (60°) van de regelmatige zeshoek.

Deze manier om de hoeken φ van hun nevenhoeken te onderscheiden is evenwel slechts een aanschouwelijk hulpmiddel: wel bruikbaar bv. in fig. 4, maar uiteraard niet in fig. 3. We laten dan ook de algemeene definitie volgen:

φ_i is de hoek, waarover S_iP_j moet draaien om samen te vallen met S_iP_i, mits deze draaiing plaats heeft in den zin, waarin S_jP_j *over 120°* moet draaien om evenwijdig te worden aan S_iP_i.

6. De hoeken φ van een zeshoek (I II) met concurrente diagonalen (fig. 2) zijn blijkbaar onafhankelijk van elkaar (verschuif bv. S_3). Zoo niet bij de zeshoeken (I II) met niet-concurrente diagonalen. Gemakkelijk leidt men nl. in fig. 3 af:

$$\frac{\sin\,(\varphi_1 - 60°)}{\sin\,(\varphi_1 + 60°)} = \frac{r-q}{d} \quad \text{(sinusregel in } \triangle\, P_2'KP_3)$$

en analoog:

$$\frac{\sin\,(\varphi_2 - 60°)}{\sin\,(\varphi_2 + 60°)} = \frac{p-r}{d} \quad \text{en} \quad \frac{\sin\,(\varphi_3 - 60°)}{\sin\,(\varphi_3 + 60°)} = \frac{q-p}{d}.$$

Sommatie geeft:

$$\frac{\sin\,(\varphi_1 - 60°)}{\sin\,(\varphi_1 + 60°)} + \frac{\sin\,(\varphi_2 - 60°)}{\sin\,(\varphi_2 + 60°)} + \frac{\sin\,(\varphi_3 - 60°)}{\sin\,(\varphi_3 + 60°)} = 0$$

of omgewerkt:

$$\operatorname{tg}\,(\varphi_1 - 30°) + \operatorname{tg}\,(\varphi_2 - 30°) + \operatorname{tg}\,(\varphi_3 - 30°) - \sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

Deze betrekking geldt algemeen, ook als de zeshoek niet zoo overzichtelijk is als fig. 3.

7. Passen wij de betrekking eens toe in het speciale geval, dat een der φ's — b.v. φ_1 — is: 90°. Dan volgt uit (1):

$$tg\ (\varphi_2 - 30^\circ) = - tg\ (\varphi_3 - 30^\circ)$$

dus $$\varphi_2 - 30^\circ = - \varphi_3 + 30^\circ \pm k\,.\,180^\circ.$$

Dus: $$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 150^\circ \pm k\,.\,180^\circ$$

Omgekeerd. Laat de som der φ's zijn $150^\circ + k\,.\,180^\circ$ of $(\varphi_1 - 30^\circ) + (\varphi_2 - 30^\circ) + (\varphi_3 - 30^\circ) = 60^\circ + k\,.\,180^\circ$.

Dan geldt:

$$\frac{tg(\varphi_1-30^\circ)+tg(\varphi_2-30^\circ)+tg(\varphi_3-30^\circ)-tg(\varphi_1 30^\circ)tg(\varphi_2-30^\circ)tg(\varphi_3-30^\circ)}{1-tg(\varphi_1-30^\circ)tg(\varphi_2-30^\circ)-tg(\varphi_2-30^\circ)tg(\varphi_3-30^\circ)-tg(\varphi_3-30^\circ)tg(\varphi_1-30^\circ)}=\sqrt{3}$$

of omgewerkt:

$$tg\ (\varphi_1 - 30^\circ) + tg\ (\varphi_2 - 30^\circ) + tg\ (\varphi_3 - 30^\circ) - \sqrt{3} =$$
$$= {}^1/_4 \{tg\ (\varphi_1 - 30^\circ) - \sqrt{3}\}\{tg\ (\varphi_2 - 30^\circ) - \sqrt{3}\}\{tg\ (\varphi_3 - 30^\circ) - \sqrt{3}\}.$$

Het eerste lid is 0 (wij denken steeds aan zeshoeken (I II) met niet concurrente diagonalen). Volgens het tweede lid krijgen wij dus:

$$\varphi_1 \text{ of } \varphi_2 \text{ of } \varphi_3 = 90^\circ.$$

De φ-som $150^\circ + k.\ 180^\circ$ treedt dus dan en alleen dan op, als een (of twee) der φ's 90° is.

Wat dit beteekent is in fig. 5 te zien: S_1P_2 en S_1P_3 liggen in

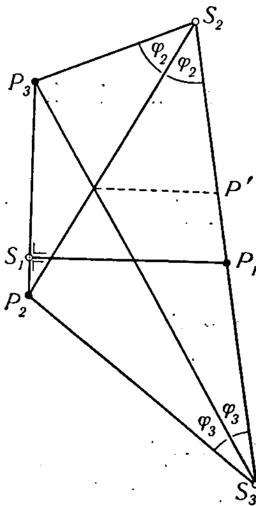


Fig. 5.

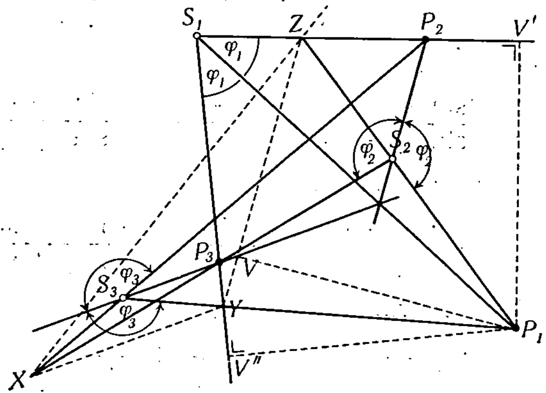


Fig. 6.

elkaars verlengde; de spiegelbeelden van P_2 en P_3 vallen samen in P', dus de zijden S_2P_1 en S_3P_1 liggen eveneens in elkaars ver-

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES



14e JAARGANG 1937/38

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN - BATAVIA

INHOUD.

Boekbesprekingen.

TYDSKRIF
VIR MIDDELBARE ONDERWYS
ORGAAN VAN DIE VERENIGING VAN ONDERWYZERS
AAN TRANSVAALSE MIDDELBARE SKOLE

Vir die Matesis-Onderwyser

By my onlangse besoek aan Holland het ek o.a. die voorreg gehad om kennis te maak met Mnr. P. Wydenes van Amsterdam, die bekende skrywer van wiskundige handleidings vir die Middelbare Skool. Daar ek al met meeste van sy publikasies bekend was, was dit vir my besonder aangenaam om hom persoonlik te leer ken. In Wydenes besit Nederland 'n man wat dit gewaag het om 'n eie koers in te slaan en deur sy leiding het die onderwys van die vak Wiskunde in Nederland beslis 'n verjongingskuur ondergaan. Die hele terrein van die skoolwiskunde—en dis daar 'n heelwat breër terrein as by ons—word deur sy werkies bestryk; planimetrie, stereometrie, driehoeksmeting, algebra, rekenkunde, beskrywende meetkunde, ens., ens., oor almal het daar een of meer werke van sy hand verskyn. En dat hulle gebruik word, daarvan getuig die feit dat die een druk op die hakke van die ander volg. As voorbeeld noem ek net die „Nieuwe School Algebra" van Wydenes en Beth. Deel I het in 1938 al sy 9e druk beleef, deel 2 sy 8e, deel 3 sy 6e, terwyl daar ook nog 'n deel 4 verskyn het. Elke Afrikaanse onderwyser van die vak behoort hierdie reeks aan te skaf. Wie hulle deurgewerk het, kan sy vakkennis dan verder opfris en verdiep deur Wydenes se Lagere Algebra, dele 1 en 2, en daarna sy Middelalgebra aan te skaf.

Nie minder deeglik en volledig is die meetkunde-werkies nie. Die mooi letter, die keurige figure en die stewige band, dit alles pak en inspireer! Waar ons in Suid-Afrika op hierdie gebied nog maar aan die begin van ons ontwikkeling staan, kan ons nie beter doen as 'n deeglike studie te maak van sulke Nederlandse werke nie. Dit sal ons help om los te kom van die vernederende oorheersing wat vandag deur uitgediende Engelse handboeke deur middel van Afrikaanse vertalings in ons land uitgeoefen word. Ek kan ongelukkig nie uitwy nie, daarvoor is die ruimte te beperk, maar graag verwys ek belangstellendes—en ek hoop daar gaan baie wees—na die Uitgewers van Wydenes se werke, nl. die firma P. Noordhoff,

Groningen. Die sal maar te bereid wees om katalogusse—en selfs proefeksemplare—te stuur.

Wat my eintlik aan die skrywe gebring het is 'n pasverskene werk van Wydenes, vir Onderwysers bedoel: „Beginselen van de Getallenleer" (Noordhoff 1937, prys ing. *f* 4.50, geb. *f* 5.25). Dit vorm deel 2 van 'n vroeërverskene werk oor die „Theorie der Rekenkunde" (Noordhoff 1926, prys *f* 2.75). Graag sou ek oor hierdie twee werke 'n bietjie in besonderhede gaan, maar ek moet my beperk. Ek vrees dat daar maar min van ons Middelbare Skool-onderwysers is wat iets meer van die getalleleer afweet as die bietjie wat hulle op skool aan die kinders leer. Hoeveel weet ons bv. van die theorie van priemgetalle, of van die kongruensieleer of van die klassieke stellinge van Fermat, Gauss en Legendre op hierdie gebied! Wie van ons het al nagedink oor vrae soos die volgende: Is elke ewe getal die verskil van twee priemgetalle? Bestaan daar oneindig veel priemgetalle van die vorm m2 + 1? Hoeveel priemgetalle lê daar benede 'n gegewe getal? Wie kan bewys dat daar oneindig veel priemgetalle is?

Getalle is interessante goed. Hulle word in die genoemde werke op boeiende wyse behandel—skaf hulle aan.

D. J. v. R.

Potchefstroom. (Prof. D. J. van Rooy.)

lengde (n.b. de kegelsnede is ontaard). We krijgen dus het volgende resultaat:

de φ-som $150° + k.\ 180°$ treedt bij zeshoeken (I II) met niet-concurrente diagonalen alleen op in „ontaarde" gevallen, die eigenlijk vierhoeken zijn.

8. Zie nu naar de trisectricenzeshoeken. In fig. 1:

$$\varphi_a = {}^1/_3 A + 30°,\ \varphi_b = {}^1/_3 B + 30°,\ \varphi_c = {}^1/_3 C + 30°;$$
$$\text{dus } \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c = 150°.$$

In fig. 4: (beschouw $\triangle\ BS_aC$ etc.) $\varphi_a = 150° - {}^1/_3 A$, $\varphi_b = 90° - {}^1/_3 B$, $\varphi_c = 150° - {}^1/_3 C$; dus $\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c = 330°$. Bij alle 18 trisectricen-zeshoeken (zie Nieuw Archief) zal men vinden: $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 150° + k\ .\ 180°$.

Bij zeshoeken (I II) met niet-concurrente diagonalen kon deze som alleen optreden in „ontaarde" gevallen; de trisectricenzeshoeken zijn niet „ontaard"; dus zijn hun diagonalen concurrent. Hieruit volgt weer, dat $\triangle\ P_aP_bP_c$ gelijkzijdig is; dus een tweede bewijs voor de stelling van Morley (en alle 18 analoge gevallen).

9. De 18 zeshoeken (I II) gevormd door de trisectricen van $\triangle$ ABC hebben dus: 1°. concurrente diagonalen, 2°. de φ-som: $150° + k.\ 180°$.

Omgekeerd: een zeshoek (I II) met concurrente diagonalen en de φ-som $150° + k.\ 180°$ (fig. 6) is een trisectricenzeshoek d.w.z. de zijden zijn trisectricen van de driehoek gevormd door de snijpunten X, IJ en Z van de overstaande zijden. Bewijs.

Laat uit P_1 de loodlijnen neer op S_1P_2 en S_1P_3: voetpunten V' en V''. Wij gaan P_1V' en P_1V'' spiegelen t.o.v. P_1S_2 resp. P_1S_3. P_1V' maakt met zijn spiegelas P_1S_2 de positieve hoek:

$$90° - \varphi_1 - 60° - \varphi_2 = 30° - \varphi_1 - \varphi_2\ (\pm\ k\ .\ 180°).$$

dus met zijn spiegelbeeld de positieve hoek $60° - 2\varphi_1 - 2\varphi_2$ ($\pm\ k.\ 360°$). Analoog: P_1V'' maakt met zijn spiegelbeeld (t.o.v. P_1S_3) de positieve hoek: $300° + 2\varphi_1 + 2\varphi_3$ ($\pm\ k.\ 360°$). Nu maakt P_1V' met P_1V'' de positieve hoek: $180° - 2\varphi_1$. Dus maakt 't spiegelbeeld van P_1V' met dat van P_1V'' de positieve hoek:

$$-(60° - 2\varphi_1 - 2\varphi_2) + (180 - 2\varphi_1) + (300° + 2\varphi_1 + 2\varphi_2) \pm k\ .\ 360° =$$
$$2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - 150°) \pm k\ .\ 360° = k\ .\ 360°.$$

De spiegelbeelden vallen dus samen en omdat de loodlijnen evenlang zijn, ook de spiegelbeelden van V′ en V″ (in V).

De spiegelbeelden van S_1P_3 t.o.v. S_3P_1 en S_1P_2 t.o.v. S_2P_1 staan in V $\perp$ op VP; vallen dus samen langs IJZ. We krijgen dus: 't spiegelbeeld van S_1P_3 t.o.v. S_3P_1 is IJZ. Op precies dezelfde wijze (loodlijnen uit P_3) laat zich bewijzen: 't spiegelbeeld van S_3P_1 t.o.v. S_1P_3 is IJX. Dus zijn S_1P_3 en S_3P_1 trisectricen van de (inspringende) hoek XIJZ.

Analoog bewijs bij de hoeken X en Z van $\triangle$ XIJZ.

10. We komen dus tot de volgende conclusie:

een zeshoek (I II) met de φ-som $150° + k.\ 180°$ is:

als de diagonalen niet concurrent zijn: een „ontaarde" zeshoek (een vierhoek)

als de diagonalen concurrent zijn: een trisectricenzeshoek.

Dit resultaat illustreert goed het groote verschil tusschen zeshoeken (I II) met concurrente en met niet-concurrente diagonalen; en tevens: dat de stelling van Morley opgaat in de eigenschappen der zeshoeken (I II).

DIE GLEICHUNG DER BERÜHRENDEN AN EINE ALGEBRAISCHE KURVE NACH DESCARTES UND HUDDE

WILHELM LOREY in Frankfurt a. M.

Die folgenden der Aufgabe dieser Zeitschrift entsprechend wesentlich didaktisch zu bewertenden Ausführungen sind durch die Dreihundertjahrfeier der Geometrie von Descartes, die im Jahre 1937 begangen wurde [1]), angeregt, aber auch durch das Anfang 1938 erschienene Buch von Gerhard Kowalewski: Grosse Mathematiker. [2])

Kowalewski widmet unter den Vorläufern von Newton und Leibniz an erster Stelle René Descartes (1596—1650)

---

[1]) Im September 1937 veranstaltete die Berliner mathematische Ortsgruppe des Fördervereins zusammen mit der Berliner Mathematischen Gesellschaft eine Gedenksitzung, in der Prof. Dr. Conrad *Müller* (Technische Hochschule Hannover) den Vortrag hielt; (erscheint in der Deutschen Mathematik). Im November 1937 sprach Verfasser in der Darmstädter Mathematischen Gesellschaft, wobei er besonders auch den Einfluss der Cossisten, d.h. der deutschen Algebraiker, wie vor allem *Faulhaber* in Ulm, auf Descartes behandelte. Leider hat sich die Hoffnung des Verfassers in dem in Ulm aufbewahrten Briefwechsel *Faulhabers* auch Briefe von Descartes zu finden, nicht erfüllt. Er ist aber überzeugt, dass *Descartes,* der *Faulhaber* sehr geschätzt hat, nach seiner Abreise aus Ulm, an Faulhaber geschrieben hat. Der Faulhabersche Briefwechsel scheint ein merkwürdiges Schicksal gehabt zu haben. Nach *Doppelmayr* befand er sich in Nürnberg. Auf der dortigen Bibliothek ist davon aber nichts bekannt. Der in der Ulmer Stadtbibliothek aufbewahrte erscheint sehr lückenhaft. Vor ein paar Jahren hat man in Ulm von einem Münchner Antiquariat einen Faulhaberschen Brief erworben. Es ist also nicht ausgeschlossen, dass irgendwo noch Teile des Briefwechsels erhalten sind. Wenn Herr *Kowalewski* a.a. O S 55 *Faulhaber,* ohne dessen Beziehung zu *Descartes* zu erwähnen, als Rechenmeister, Zahlenmystiker und Alchemist bezeichnet, so ist das keine ausreichende Charakterisierung dieses Ulmer Mathematikes, der in Ulm eine mathematische Tradition geschaffen hat, so dass es an den Universitäten Wittenberg und Leipzig hieß: Ulmes sunt mathematici. *Faulhaber* ist auch wiederholt als Berater für Befestigungsanlagen herangezogen worden.

[2]) I. F. Lehmann Verlag München—Berlin 1938.

ein Kapitel, dem „mit Recht so genannten Vater der analytischen Geometrie". Er erwähnt (S. 64) die „merkwürdig umständliche Art, mit der D e s c a r t e s die Tangente im Punkte P einer Kurve bestimmt". Meines Erachtens ist das Descartes'sche Verfahren, namentlich auch geschichtlich betrachtet, nicht so merkwürdig umständlich; es dürfte vielmehr heute eine recht geeignete Uebungsaufgabe für Anfänger bilden. Wenn ich es für diesen Zweck im folgenden darstelle, will ich allerdings nicht wörtlich die für uns heute schwerfällige mathematische Ausdrucksweise von Descartes benutzen, sondern seinen Gedankengang in der den Schülern der oberen Klassen geläufigen mathematischen Sprache wiedergeben, ein Verfahren, das übrigens K o w a l e w s- k i überwiegend bei seinen feinsinnigen Analysen mathematischer Arbeiten benützt. Betont sei hier aber im Gegensatz zu seiner Bemerkung S. 63, dass die *recht*winkligen Koordinaten bei D e s- c a r t e s noch nicht die Rolle spielen, die sie später bekommen haben, wie es sich auch in dem heute in der Nomographie üblichen Ausdruck „Cartesisches Netz" zeigt. D e s c a r t e s hat im Allgemeinen schiefwinklige Koordinaten. [3])

Die Gleichung der Berührenden findet er nun so: durch P_1 und einen zweiten benachbarten Punkt P_2 der Kurve bestimmt er einen Kreis, der seinen Mittelpunkt M auf der x-Achse hat.

Er lässt dann P_2 gegen P_1 rücken und gewinnt in dem Lot auf MP_1 in P_1 die gesuchte Berührende.

Sind (x_1, y_1) die Netzzahlen von P_1, (x_2, y_2) die von P_2 und $(x_m, 0)$ die des zu bestimmenden Mittelpunktes M, dessen Halbmesser r auch unbekannt ist, so gelten also die Gleichungen:

(1) $(x_1 - x_m)^2 + y_1^2 = r^2$; (2) $(x_2 - x_m)^2 + y_2^2 = r^2$;

die Subtraktion dieser Gleichungen liefert:

$$(3) \quad x_m = \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2(x_1 - x_2)} = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{2(x_1 - x_2)}.$$

Lässt man P_2 (x_2, y_2) auf P_1 (x_1, y_1) rücken, so wird natürlich der zweite Summand $\frac{y_1^2 - y_2^2}{2(x_1 - x_2)}$ unbestimmt.

---

[3]) Auch an vielen anderen Stellen sind von Standpunkt der mathematisch-geschichtlichen Quellenforschung gegen Kowalewki's Buch starke Einwendungen zu erheben.

Die Bestimmung ergibt sich aus der bis jetzt noch nicht benutzten Forderung, dass die beiden Punkte P_1 und P_2 auf einer gegebenen Kurve liegen sollen. Für Schüleraufgaben wähle man vielleicht eine Ellipse, sodass also die Gleichungen gelten:

(4) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ (5) $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1.$

Aus ihnen folgt

(6) $$\frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} = \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2},$$

also (7) $$\frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1 - x_2} = -\frac{(x_1 + x_2) b^2}{a^3},$$

und daraus, wenn $P_2 \to P_1$, also $x_2 \to x_1 = \xi$, $y_2 \to y_1 = \eta$,

(8) $$x_m \to \xi - \xi \frac{b^2}{a^2}.$$

Nun ist die Gleichung der durch MP bestimmten Graden

(9) $$\frac{y}{x - x_m} = \frac{\eta}{\xi - x_m};$$

also die Gleichung des Lots auf MP in P:

(10) $$\frac{y - \eta}{x - \xi} = -\frac{\xi - x_m}{\eta}.$$

Setzt man in (10) für x_m den Wert aus (8) ein, so erhält man die gesuchte Gleichung der Berührenden einer Ellipse im Punkte P (ξ, η):

(11) $$\frac{x \cdot \xi}{a^2} + \frac{y \cdot \eta}{b^2} = 1.$$

Die vorstehende ausführliche Ableitung dürfte wohl erkennen lassen, dass hier in der Tat eine geeignete Schüleraufgabe vorliegt.

Ein anderes in der 1659 von dem Leydener Mathematiker Frans von Schooten herausgegebenen und durch Zusätze vermehrten lateinischen Ausgabe der Descartesschen Geometrie veröffentlichtes Verfahren stammt von dem Juristen und Mathematiker Hudde[4]),

---

[4]) John. Huddenii epistola II. „de Maximis et Minimis". Hudde ist nicht der einzige Bürgermeister, der in der Geschichte der Mathematik zu nennen ist. Aus Görlitz kann man den ehemaligen Mathematiker des Görlitzer Gymnasiums *Scultetus* (1570) nennen, der bei seinem Uebertritt in den Rat der Stadt aus dem Schulamt ausschied, „weil es nicht angängig erschien, dass der unterste im Lehrer kollegium

dem späteren Bürgermeister von Amsterdam. Auch dieses ebenfalls von Kowalewski erwähnte Verfahren scheint mir für Schüleraufgaben empfehlenswert.

Hudde legt durch den Berührungspunkt eine Gerade und bestimmt deren Schnittpunkte mit der gegebenen Kurve $f(x, y) = 0$. Ist diese von n-ter Ordnung, so werden die Abstandszahlen x der Schnittpunkte durch eine Gleichung n-ten Grades

(12) $$\varphi(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{x-2} + \ldots + c_n = 0$$

geliefert.

Soll nun die zunächst willkürliche Gerade eine Berührende in P werden, so müssen zwei Schnittpunkte zusammenfallen, die Gleichung $\varphi(x) = 0$ also eine Doppelwurzel haben. Für uns heute ist die Bedingung für eine Doppelwurzel $\varphi'(x) = 0$. Hudde hat die Differentialrechnung noch nicht. Er hat ohne sie Sätze über Doppel- und mehrfache Wurzeln gewonnen, die m.E. wenigstens für einfache Fälle der heutigen Schulmathematik leicht zugänglich sind.

Es sei zunächst eine Gleichung dritten Grades gegeben:

(13) $$\varphi(x) = x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = 0$$

mit der Doppelwurzel $x_1 = x_2 = \xi$ und der dritten Wurzel x_3. Dann bestehen also zwischen den Vorzahlen c_ν und den Wurzeln ξ und x_3 die Gleichungen:

(14) $$c_1 = -(2\xi + x_3); \qquad c_2 = \xi^2 + 2\xi x_3; \qquad c_3 = -\xi^2 . x_3.$$

Nun lautet der *Huddesche* Satz für diesen Sonderfall: die Doppelwurzel ξ der Gleichung (13) genügt auch der Gleichung

(15) $$3x^2 + 2c_1 x + c_2 = 0.$$

Die Richtigkeit ergibt sich sofort, wenn man in (14) für die c_ν die Werte aus (13) und ξ für x einsetzt:

$$3\xi^2 - 2(2\xi + x_3)\xi + \xi^2 + 2\xi x_3 \equiv 0.$$

Man lasse zur Uebung den entsprechenden Satz für die Gleichung vierten Grades beweisen:

(16) $$\varphi(x) = x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 = 0.$$

---

der oberste im Rat sei". *Scultetus* war astronomisch tätig. Vgl. *W. Lorey*: Archimedes und unsere Zeit. Zeitschrift für lateinlose Schule 1908. (Festrede, gehalten am 27. 1. 1908 in der Aula des Görlitzer Gymnasiums).

Hat diese die Wurzeln $x_1 = x_2 = \xi$, x_3, x_4, so gilt:

(17) $c_1 = -(2\xi + x_3 + x_4)$; $c_2 = \xi^2 + 2 . \xi . (x_3 + x_4) + x_3 x_4$;
$c_3 = -\xi^2(x_3 + x_4) - 2\xi x_3 x_4$; $c_4 = \xi^2 . x_3 x_4$.

Die *Huddesche* Behauptung lautet: die Doppelwurzel genügt auch der Gleichung:

(18) $$4x^3 + 3c_1x^2 + 2c_2x + c_3 = 0.$$

Setzt man die Werte aus (17) in (18) ein und für x wieder ξ, so erhält man in der Tat identisch Null.

Man kann noch die allgemeine Behauptung wenigstens formulieren lassen und sieht so nebenbei allgemein die Uebereinstimmung mit der eben angegebenen heutigen Bedingung $\varphi'(x) = 0$.

Für Schüleraufgaben ist das aber vielleicht nicht nötig. Bei der Ellipse wird $\varphi(x) = x^2 + c_1x + c_2$ und die Doppelwurzel genügt der Gleichung $2x + c_1 = 0$.

Es sei wieder die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und die Gleichung einer zunächst beliebigen Geraden durch den Punkt P (ξ, η) dieser Ellipse $\frac{y - \eta}{x - \xi} = m$. Die Richtungskonstante m ist so zu bestimmen, dass die Gerade Berührende wird. Ihre Schnittpunkte mit der Ellipse werden durch die Gleichung

(19) $$\varphi(x) = \frac{x^2}{a^2} \frac{[\eta + m(x - \xi)]^2}{b^2} - 1 = 0$$

geliefert.

Da P (ξ, η) als Doppelpunkt der Gleichung $2\xi + c_1 = 0$ genügen muss, braucht man nur die Vorzahl c_1 der geordneten Gleichung $\varphi(x) = 0$, d.h. die Vorzahl von x zu berechnen. Es wird:

$$c_1 = (-2m^2\xi + 2\eta m)\frac{a^2}{b^2 - m^2a^2}$$

und daraus $m = -\frac{\xi b^2}{\eta a^2}$; also wie oben die Gleichung der Berührenden $\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1$.

Frage an die Schüler: Warum kann man nicht gleich in (19) $x = \xi$ setzen?

Um auch ein Beispiel für eine Kurve höherer Ordnung zu

behandeln, bestimme man die Berührende an die Parabel dritter Ordnung

$$y = x^3.$$

Mit den gleichen Bezeichnungen wird hier

$$\varphi(x) = x^3 - \eta - m(x - \xi) = 0;$$

also $c_1 = 0$; $c_2 = - m$ und somit aus der Doppelpunktsbedingung $3x^2 - m = 0$ die Richtungskonstante im Punkte $(\xi,\eta) : m = 3\xi^2$, ein Ergebnis, das die Schüler ja auch sofort aus $y' = 3x^2$ bestätigen können.

Wenn man die oben erwähnte heutige Doppelpunktsbedingung $\varphi'(x) = 0$ benutzen kann, werden die Rechungen natürlich viel einfacher; z.B. für die Kurve $x^4 + y^4 = r^4$ wird

$$\varphi(x) = x^4 + [\eta + m(x - \xi)]^4 - r^4 = 0$$

also

$$\varphi'(x) = 4x^3 + 4[\eta + m(x - \xi)]^3 m = 0.$$

Jetzt kann man für den Doppelpunkt sofort $x = \xi$ setzen und erhält $m = - \frac{\xi^3}{\eta^3}$; also die Gleichung der Berührenden im Punkte (ξ, η)

$$\xi^3 x + \eta^3 y = r^4.$$

Uebrigens liefert auch das Descartessche Verfahren für diese beiden Kurven ziemlich einfach die Gleichungen der Berührenden.

Bei der Parabel $y = x^3$ wird nach Gleichung (3)

$x_m = \xi + 3\xi^2$; also nach (10) die Gleichung der Berührenden:

$$y = 3 . \xi^2 . x - 2\eta.$$

Bei dem „Kreis" vierter Ordnung $x^4 + y^4 = r^4$, gilt

$$x_1^4 - x_2^4 + y_1^4 - y_2^4 = 0$$

und daraus durch Zerlegung:

$$\frac{y_1^2 - y_2^2}{2(x_1 - x_2)} = - \frac{(x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)}{2(y_1^2 + y_2^2)} \underset{\substack{y_1 \to y_2 = \eta \\ x_1 \to x_2 = \xi}}{\to} - \frac{\xi^3}{\eta^2},$$

also nach (3)

$$x_m = \xi - \frac{\xi^3}{\eta^2}$$

und daher nach (10) die Gleichung der Berührenden im Punkt $(\xi_1 \eta)$

$$\frac{y-\eta}{x-\xi} = -\frac{\xi^3}{\eta^3} \quad \text{oder} \quad \xi^3 x + \eta^3 y = \xi^4 + \eta^4 = r^4.$$

Tritt bei *Hudde* im Wesen durch $\varphi'(x) = 0$ die Differentialrechnung auf, so hat sie *Descartes* in der Zerlegung

$$x_1{}^n - x_2{}^n = (x_1 - x_2)(x_1{}^{n-1} + x_1{}^{n-2}x_2 + \ldots + x_2{}^{n-1}),$$

die doch auch heute zur Berechnung von $f'(x)$ für $f(x) = x^n$ gern benutzt wird. Beide sind aber von dem symbolischen Algorithmus der Differentialrechnung noch weit entfernt, können aber mit Recht Vorläufer von *Newton* und *Leibniz* genannt werden.

ERGÄNZUNG BEI DER KORREKTUR.

Der in Anm. 1 genannte „Förderverein" ist der 1891 gegründete Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes, der sich im April 1938 aufgelöst hat, um fortan innerhalb des Reichssachgebiets Mathematik und Naturwissenschaften des Nationalsozialistischen Lehrerbundes zu wirken. Vgl. die demnächst erscheinende im Auftrag des letzten Vorstandes vom Verfasser geschriebene Geschichte: „Der Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes 1891—1938, zugleich ein Rückblick auf 50 Jahre mathematisch-naturwissenschaftlicher Erziehung und Bildung." Frankfurt a. M., Verlag O. Salle, ungefähr 130 Seiten.

Wie algebraische Kurven höherer Ordnung auf der Schule behandelt werden können, zeigt *Fladt* in der eben erschienenen von ihm herausgegebenen „Erinnerungsschrift an das 50-jährige Bestehen des Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg". Dieser Verein, die bisherige Württembergische Landesgruppe des Fördervereins, ist mit diesem in das oben genannte Reichssachgebiet übergegangen.
